Predlog optimizacije tačnosti transcedentalnih brojeva nezavisne od ciljne arhitekture

Ana T. Ačanski, Fakultet Tehničkih Nauka, Novi Sad

***Sadržaj* — U ovom radu je dat predlog optimizacije greške koja se javlja pri najjednostavnijim računarskim operacijama, a nastale kod necelobrojnog količnika dva prirodna broja. Osnovni cilj ove metode je tačnost, dok je složenost stavljena u drugi plan. Po svojoj prirodi pripada skupu optimizacionih metoda, mada se u konkretnim inženjerskim problemima može svesti na aproksimativnu. Poznavajući prirodu ovog problema može se dokazati transedentalnost brojeva.**

***Ključne reči* — Konkretna greška, transcedentalnost, optimizacija.**

I. Uvod

Poznavanjem pravila o brojevima deljivim brojem dva, tri, pet sužava se problem prostih brojeva. Prva prepreka javlja se kod broja sedam kod kojeg je dovoljno deliti u šest iteracija kako bi se dobili koeficijenti koji se periodično ponavljaju. Uopšteno, svaki broj p je deljiv bilo kojim brojem n u skupu racionalnih brojeva sa maksimalnom tacnošću na (n-1)-oj cifri iza decimalnog zapisa i minimalnom greškom na n-toj cifri.

II. Format racionalnog broja

Za brojeve p i n (p, n $\in$ **N**) postoji broj q (q $\in$ **Q**) za koji važi da je:

$$Q\left(\frac{p}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n-1}A_i*10^{-i}+A_1*10^{-(n-1)} \qquad (1)$$

tačno rešenje nakon (n-1) koraka ako i samo ako je p>n.

Za p<n važi:

$$Q\left(\frac{p}{n}\right)=\frac{10^s*Q\left(\frac{p}{n}\right)}{10^s}=\frac{1}{10^s}Q\left(\frac{t}{n}\right) \qquad (2)$$
$$=\frac{1}{10^s}\left(\sum_{i=1}^{n-1}A_i*10^{-i}+A_1*10^{-(n-1)}\right)$$

gde je t prirodan broj za koji važi t>n, a s je broj cifara prirodnog broja n.

Koeficijente A_i (i = 1,2,...,n-1) dobijamo iterativnim postupkom koji se ponavlja (n-1) puta, kao ceobrojne vrednosti dobijene prilikom deljenja, a ostatak koristimo u sledećoj operaciji za dobijanje A_{i+1}, kao kod standardne procedure deljenja. Sama pojava deljenja daje utisak kompleksnosti ovog algoritma, koja dovodi u pitanje njegovu upotrebljivost na platformama sa ograničenim resursima. Ipak deljenje se može znatno uprostiti operacijom oduzimanja iz razloga što je u svakoj iteraciji tačnost rezultata deljenja dovoljna do (n-1) decimale.

Izlazni kriterijum, da bi se ova metoda mogla primeniti na sve prirodne brojeve, je $A_n \neq A_1$ i $A_n=0$. Da bi se proverio izlazni kriterijum dovoljno je obaviti još jednu iteraciju. Iz ovoga sledi da je potreban broj iteracija jednak broji n.

Ukoliko se traži veća tačnost od (n-1)-ve decimale, reda k (k $\in$ **N**) i k/n=r+m, tada važi da je :

$$Q\left(\frac{p}{n}\right)=\sum_{j=0}^{r-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}A_i*10^{-i}\right)^{-j(n-1)}+\sum_{i=1}^{m}A_i*10^{-(r*(n-1)+i)} \qquad (3)$$

rezultat do željene tačnosti gde važi:

- (m $\in$ **N**), 1<m<n-1 predstavlja ostatak k/n
- r celobrojna vrednost količnika k/n, a

$$G\left(\frac{p}{n}\right)=\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{l=m+1}^{n-1+m}A_l*10^{-(r*(n-1)+l)*c} \qquad (4)$$

predstavlja grešku dobijenog rezultata.

Za m=1 dobija se da je k/n celobrojna vrednost te je rezultat:

$$Q\left(\frac{p}{n}\right)=\sum_{j=0}^{r-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}A_i*10^{-i}\right)^{-j(n-1)}+A_1*10^{-(r*(n-1)+1)} \qquad (5)$$

Jednačina (4) koja predstavlja grešku izračunavanja predstavlja tačnu i preciznu grešku dobijenog rezultata. Zbog toga se uvodi novi pojam, konkretna greška, koja se od apsolutne i relativne razlikuje po tome što je i precizna i tačna. Za beskonačno velike vrednosti n konkretna greška teži nuli

$$\lim_{n\to\infty}G\left(\frac{p}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{l=m+1}^{n-1+m}A_l*10^{-(r*(n-1)+l)*c}=0 \qquad (6)$$

III. Primena na primeru transcedentalnog broja

Neka je dat izraz:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \qquad (7)$$

Predlog maksimalne optimizacije tacnosti transcedentalnih brojeva nezavisne od ciljne arhitekture

Ana T. Ačanski, Fakultet Tehničkih Nauka, Novi Sad (telefon: +381-(0)21-633-50-91; e-mail: trajkovicana@yahoo.com).

primenom ove optimizacione metode može se dokazati njegova transcedentalnost u skupu racionalnih brojeva.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=$$

Primenom izraza (2) dobija se:

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(10^{-s}*(\sum_{j=1}^{r-1}\left(\sum_{i=1}^{k-1}A_i*10^{-i}\right)*10^{-j(k-1)}+\sum_{i=1}^{m}A_i*10^{-(r*(k-1)+i)}))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(10^{-s}*(\sum_{j=1}^{r-1}\left(\sum_{i=1}^{k-1}A_i*10^{-i}\right)*10^{-j(k-1)})+\sum_{k=1}^{n}10^{-s}(\sum_{i=1}^{m}A_i*10^{-(r*(k-1)+i)}))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(10^{-s}*(\sum_{j=1}^{r-1}10^{-j(k-1)}*\left(\sum_{i=1}^{k-1}A_i*10^{-i}\right))+(\sum_{k=1}^{n}10^{-r(k-1)-s}(\sum_{i=1}^{m}A_i*10^{-i})))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(10^{-s}*(\sum_{j=1}^{r-1}10^{-j(k-1)}*\left(\sum_{i=1}^{k-1}A_i*10^{-i}\right))+(10^{r-s}\sum_{k=1}^{n}10^{-r*k}(\sum_{i=1}^{m}A_i*10^{-i})))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(10^{-s}*(\sum_{j=1}^{r-1}10^{-j(k-1)}*A*10^{-(k-1)})+(10^{r-s}\sum_{k=1}^{n}10^{-r*k}*A*10^{m}))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(10^{-s}*(A*\sum_{j=1}^{r-1}10^{-j(k-1)-(k-1)})+(A*10^{r+m-s}\sum_{k=1}^{n}10^{-r*k}))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(10^{-s}*(A*\sum_{j=1}^{r-1}10^{-(j+1)*(k-1)})+(A*10^{r+m-s}\sum_{k=1}^{n}10^{-r*k}))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(10^{-s}*(A*\sum_{j=1}^{r}10^{-j*(k-1)}*10^{-(k-1)})+(A*10^{r+m-s}\sum_{k=1}^{n}(10^{-r})^{k}))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(10^{-1}*(A*10^{-(k-1)}*\sum_{j=1}^{r}(10^{-(k-1)})^{j})+(A*10^{r+m-s}(\sum_{k=0}^{n}(10^{-r})^{k}-1)))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(A*10^{-k}*\sum_{j=1}^{r}(10^{-(k-1)})^{j})+(A*10^{r+m-s}(\frac{(10^{-r})^{n+1}-1}{10^{-r}-1}-1)))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(A*10^{-k}*(\sum_{j=0}^{r}(10^{-(k-1)})^{j}-1)+(A*10^{r+m-s}(\frac{(10^{-r})^{n+1}-1}{10^{-r}-1}-1)))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(A*10^{-k}*(\frac{(10^{-(k-1)})^{r+1}-1}{10^{-(k-1)}-1}-1)+(A*10^{r+m-s}(\frac{(10^{-r})^{n+1}-1}{10^{-r}-1}-1)))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(A*10^{-k}*(\frac{(10^{-(k-1)})^{r+1}-1-10^{-(k-1)}+1}{10^{-(k-1)}-1})+(A*10^{r+m-s}(\frac{(10^{-r})^{n+1}-1}{10^{-r}-1}-1)))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(A*10^{-k}*(\frac{(10^{-(k-1)})^{r+1}-1-(10^{-(k-1)}-1}{10^{-(k-1)}-1})+(A*10^{r+m-s}(\frac{(10^{-r})^{n+1}-1}{10^{-r}-1}-1)))$$

primenom pravila za razliku binoma dobija se:

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(A*10^{-k}*(\frac{(10^{-(k-1)}-1)((\sum_{z=0}^{r+1}10^{-(k-1)*(r+1)-z}-1)-1)}{10^{-(k-1)}-1})+(A*10^{r+m-s}(\frac{(10^{-r})^{n+1}-1}{10^{-r}-1}-1)))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(A*10^{-k}*((\sum_{z=0}^{r+1}10^{-(k-1)*(r+1)-z}-1)-1))+(A*10^{r+m-s}(\frac{(10^{-r})^{n+1}-1}{10^{-r}-1}-1)))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(A*10^{-k}*((\sum_{z=0}^{r+1}10^{-(k-1)*(r+1)-z})-r-1-1))+(A*10^{r+m-s}(\frac{(10^{-r})^{n+1}-1}{10^{-r}-1}-1)))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(A*10^{-k}*(10^{-(k-1)*(r+1)}(\sum_{z=0}^{r+1}10^{-z})-r-2))+(A*10^{r+m-s}(\frac{(10^{-r})^{n+1}-1}{10^{-r}-1}-1)))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(A*10^{-k}*(10^{-(k-1)*(r+1)}(\frac{10^{-(r+2)}-1}{10^{-1}-1}))+(A*10^{r+m-s}(\frac{(10^{-r})^{n+1}-1}{10^{-r}-1}-1)))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(A*10^{-k-r*k-k+r+1}*(\frac{10^{-(r+2)}-1}{10^{-1}-1}))+(A*10^{r+m-s}(\frac{(10^{-r})^{n+1}-1-10^{-r}+1}{10^{-r}-1}-1)))$$

$$=\lim_{n\to\infty}A*10^{r+1}(\frac{10^{-(r+2)}-1}{10^{-1}-1})\sum_{k=1}^{n}(10^{-2k-r*k})+A*10^{2*r+m-s}\frac{(10^{-r})^{n}}{10^{-r}-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}A*10^{r+1}(\frac{10^{-(r+2)}-1}{10^{-1}-1})\sum_{k=1}^{n}(10^{-(2+r)k})+A*10^{2*r+m-s}\frac{(10^{-r})^{n}}{10^{-r}-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}A*10^{r+1}\frac{10^{-(r+2)}-1}{10^{-1}-1}*\frac{10^{-(2+r)(n+1)}-1}{10^{-(2+r)}-1}+A*10^{2*r+m-s}\frac{(10^{-r})^{n}}{10^{-r}-1}=\frac{A*10^{2*r+m+s}}{10^{-r}-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}A*10^{r+1}\frac{10^{-(r+2)}-1}{10^{-1}-1}*\frac{10^{-(2+r)(n+1)}-1}{10^{-(2+r)}-1}+A*10^{r+(r+m)-s}\frac{(10^{-r})^{n}}{10^{-r}-1}$$

Kako je t/n=r+m:

$$=\lim_{n\to\infty}A*10^{r+1}\frac{10^{-(r+2)}-1}{10^{-1}-1}*\frac{10^{-(2+r)(n+1)}-1}{10^{-(2+r)}-1}+A*10^{r+\frac{t}{n}-s}\frac{(10^{-r})^{n}}{10^{-r}-1}=\frac{A*10^{r-s}}{10^{-r}-1}$$

dobija se konačan broj koji opisuje prirodu transcedentanlog broja u zavisnosti od međusobnog položaja parametara r i s u skupu prirodnih brojeva.

Na osnovu ovoga se može zaključiti da za broj

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

postoji polinom

$$p(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})=\sum_{i=0}A_i*(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})^{i}$$

čiji je on koren.

IV. ZAKLJUČAK

Na primeru transcedentalnog broja (7) može se zaključiti da je tačnost transcedentalnog broja ograničena ciljnom platformom u inženjerskim problemima, a teorijski je nezavisna od nje. Kako ciljna arhitektura ograničava opseg parametara p i s u skupu prirodnih brojeva sledi da se dokazani transcedentalni broj može zapisati samo prividno konačanim brojem cifara, a realno beskonačnim u skupu ($n\in\mathbf{N}$), $n\to\infty$.

Data teoretska osnova se može primeniti na rešavanje transcedentalnih jednačina. Ona može predstavljati i ideju za stvaranje novih ocena grešaka, za formiranja izlaznih kriterijuma i možda kao osnova za izvođenje novog numeričkog postupka. Činjenica da se primenom ovog postupka mogu dobiti tačni i precizni rezultati ograničeni ciljnom platformom, otvara mogućnost primene metode u inženjerskim oblastima koje zahtevaju maksimalnu preciznost (arhitektura, građevina, biomedicinski inženjering, ...).

LITERATURA

[1] Alan Baker, Transcendental Number Theory, Cambridge University Press, 1975, ISBN 0-521-39791-X.

[2] Peter M Higgins, "Number Story" Copernicus Books, 2008, ISBN 978-84800-000-1

[3] Serge Lang, Introduction to Transcendental Numbers, Addison-Wesley Publishing Company, 1966

TRANSCENDENTAL NUMBER ACCURACY OPTIMIZATION PROPOSAL NOT DEPENDANT OF TARGET PLATFORM

Ana T. Ačanski

ABSTRACT

This paper presents short overview of transcendental number accuracy optimization proposal not dependant of target platform. Main goal of this method is accuracy, leaving complexity problem as unessential. By it's nature it is optimization method, but in some real engineering problems it can be used as approximation method. Using this method one can prove that number is transcendental.