

Linearizacija optimalne kompresorske funkcije

Zoran H. Perić, Jelena R. Nikolić

Sadržaj — U ovom radu predložena su dva metoda linearizacije optimalne kompresorske funkcije koji se razlikuju po tome da li je nakon linearizacije broj reprezentacionih nivoa unutar segmenata konstantan ili promenljiv. U cilju optimizacije gustine reprezentacionih nivoa kod metoda sa promenljivim brojem reprezentacionih nivoa korišćena je tehnika Lagranževih multiplikatora. Za predpostavljeni Laplasov izvor izvedeno je projektovanje kako nelinearnog, tako i linearizovanih kompodora, nakon čega je izvedena analiza performansi.

Ključne reči — Linearizacija, Optimalna kompresorska funkcija, Skalarni kompodor.

I. UVOD

KVANTIZACIJA predstavlja proces diskretizacije signala odnosno njegovih odmeraka po amplitudi. Skalarni kvantizer je jednoznačno određen dozvoljenim izlaznim nivoima koji se nazivaju reprezentacionim nivoima i podelom ulaznog opsega vrednosti u N ćelija ili kvantizacionih intervala [1]–[6]. U zavisnosti od toga da li je veličina ovih kvantizacionih intervala, odnosno amplitudskih kvanata, jednaka ili ne, definisana je opšta podela skalarnih kvantizera na uniformne i neuniformne kvantizere [1]–[6]. Intuitivno je jasno da u slučaju kada je funkcija gustine verovatnoće trenutnih vrednosti ulaznog signala približno uniformna u celokupnom amplitudskom opsegu kvantizera $R=[-x_{max}, x_{max}]$, opseg kvantizera treba ravnomerno podeliti na N jednakih amplitudskih kvanata, odnosno primeniti uniformnu kvantizaciju. Sa druge strane, brojnim statističkim merenjima pokazano je da su kod mnogih telekomunikacionih signala manje trenutne vrednosti verovatnije nego veće, te da uniformni kvantizer za takve signale nije optimalan u smislu odnosa signal-šum kvantizacije [5]. Upravo iz tog razloga, prednost je na strani neuniformnih kvantizera koje karakteriše nejednaka veličina amplitudskih kvanata [1]–[6]. Jedan od načina realizacije neuniformne kvantizacije predložio je Bennet [1], [5]. On je uveo tehniku kompodovanja kojom se neuniformno kvantovanje postiže kompresijom ulaznog signala x korišćenjem kompresora sa nelinearnom karakteristikom $c(\cdot)$, zatim kvantovanjem komprimovanog signala $c(x)$ primenom uniformnog kvantizera i na kraju ekspanovanjem kvantovane vrednosti komprimovanog signala, korišćenjem nelinearne inverzne karakteristike

kompresije $c^{-1}(\cdot)$ [1], [5]. U opštem slučaju karakteristika kompresije je monotono rastuća neparno simetrična funkcija koju je, kao što je u literaturi pokazano, veoma složeno realizovati [5]. Problem je prevaziđen linearizacijom karakteristike kompresije odnosno definisanjem segmentnih A i μ zakona kompresije [5]. Ovi zakoni određeni su najpre poštovanjem kriterijuma konstantnosti odnosa signal-šum kvantizacije a zatim i uvođenjem određenih modifikacija pri čemu se nije mogao zadovoljiti kriterijum maksimalnog odnosa signal-šum kvantizacije. Kako se kod modela kompodora maksimalan kvalitet kvantovanog signala postiže primenom optimalne kompresorske funkcije [5], došli smo na ideju da u ovom radu izvedemo linearizaciju upravo optimalnog zakona kompresije i da na osnovu analize performansi izvedemo zaključke o valjanosti ove ideje. Iako su u literaturi razmatrani uslovi robusnosti ovog modela kvantizera [7], [8] do sada nije izvedena numerička analiza performansi, odnosno nije prikazano poređenje sa nelinearnim modelom optimalnog kompodora. Iz tog razloga u ovom radu najpre ćemo linearizacijom optimalne kompresorske funkcije projektovati model deo po deo linearnog kompodora, a zatim ćemo oceniti performanse dobijenog modela kvantizera. Šta više, u radu će biti predložena i poređena dva metoda linearizacije optimalne kompresorske funkcije. Konceptualna razlika ova dva metoda ogleda se u tome da li je nakon linearizacije odnosno preuređenja reprezentacionih nivoa broj ovih nivoa unutar segmenata konstantan ili promenljiv. Promenljiv broj reprezentacionih nivoa u radu će biti određen primenom tehnike Lagranževih multiplikatora [9] odnosno optimizacijom distorzije uz ograničenje u pogledu ukupnog broja reprezentacionih nivoa.

II. MODEL SISTEMA

U ovom poglavlju opisaćemo najpre model nelinearnog kompodora a zatim i dva metoda linearizacije optimalne kompresorske funkcije. Izvešćemo projektovanje kako nelinearnog tako i dobijenih modela deo po deo uniformnih skalarnih kompodora. Kao što je već rečeno Bennet je pretpostavio da se neuniformni skalarni kvantizer može realizovati kaskadnom vezom kompresora, uniformnog kvantizera i ekspanora i za takav model odredio da je granularna distorzija [5]:

$$D_g = \frac{1}{12N^2} \int_R \frac{p(x)}{[\lambda(x)]^2} dx, \quad (1)$$

gde je N veličina kodne knjige, tj. ukupan broj reprezentacionih nivoa, $p(x)$ funkcija gustine verovatnoće odmeraka izvora, a $\lambda(x)$ gustina reprezentacionih nivoa.

Z. H. Perić, Elektronski fakultet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija (telefon: 381-18-529101; faks: 381-18-588399; e-mail: zoran.peric@elfak.ni.ac.rs).

J. R. Nikolić, Elektronski fakultet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija (e-mail: jelena.nikolic@elfak.ni.ac.rs).

Osim toga, ustanovio je da je minimum Benetovog integrala (1) ujedno i minimum distorzije neuniformnog skalarnog kvantizera, odnosno da se tehnikom komandovanja može realizovati optimalna skalarna kvantizacija. Optimalna gustina reprezentacionih nivoa kojom se ostvaruje minimum distorzije omogućila je nalaženje optimalne kompresorske funkcije $c(x)$ [5]:

$$c(x) = x_{\max} \frac{\int_0^x p^{1/3}(x) dx}{\int_0^{x_{\max}} p^{1/3}(x) dx}. \quad (2)$$

Određivanjem nagiba ovako definisane kompresorske funkcije u reprezentacionim nivoima (na pozitivnom delu karakteristike):

$$c'(x) = \frac{\Delta}{\Delta_i} = \frac{2x_{\max}}{N\Delta_i} \approx c'(y_i), \quad i = 1, \dots, N/2, \quad (3)$$

i određivanjem gustine reprezentacionih nivoa:

$$\lambda(x) = \frac{1}{N\Delta_i}, \quad (4)$$

dolazimo do poznatog oblika Benetovog integrala [5]:

$$D_g = \frac{x_{\max}^2}{3N^2} \int_R \frac{p(x)}{[c'(x)]^2} dx = \frac{1}{12} \int_R \Delta_i^2 p(x) dx, \quad (5)$$

koji je dalje jednak:

$$D_g = 2 \sum_{i=1}^{N/2} \frac{\Delta_i^2}{12} P_i, \quad (6)$$

pri čemu je P_i verovatnoća da trenutna vrednost amplitude ulaznog signala pripada i -toj ćeliji $[t_{i-1}, t_i]$:

$$P_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} p(x) dx. \quad (7)$$

Projektovanje nelinearnog skalarnog komandora za predpostavljeni Laplasov izvor:

$$p(x) = \frac{\sqrt{2}}{2\sigma} e^{-\frac{|x|\sqrt{2}}{\sigma}}, \quad (8)$$

i referentnu varijansu $\sigma^2 = \sigma_{ref}^2$ izvodimo određivanjem kompresorske funkcije u granicama odluke $c(t_i)$ i reprezentacionim nivoima $c(y_i)$ (2) uz poštovanje uslova:

$$c(t_i) = i \frac{2x_{\max}}{N}, \quad c(y_i) = \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{2x_{\max}}{N}. \quad (9)$$

Određivanjem granica odluke komandora t_i , $i=0,1,\dots,N/2$:

$$t_i = \frac{3\sigma_{ref}}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{N}{N + 2i \left(\exp\left(-\frac{\sqrt{2}x_{\max}}{3\sigma_{ref}}\right) - 1 \right)} \right), \quad (10)$$

određena je i veličina amplitudskih kvanata:

$$\Delta_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, \dots, N/2. \quad (11)$$

Napomenimo da su simetrijom definisane odgovarajuće negativne vrednosti reprezentata kao i granica odluke tako da ćemo nadalje razmatrati samo prvi kvadrant.

Na sličan način u nastavku rada izvodimo projektovanje linearizovanog deo po deo uniformnog skalarnog komandora. Suštinska razlika uneta linearizacijom odnosi se na podelu amplitudskog opsega kvantizera na po L segmenata u oba kvadranta, pri čemu je svaki od segmenata uniformno podeljen na određeni broj ćelija čije se veličine od segmenta do segmenta razlikuju (Sl. 1.). Odlučili smo se da razmotrimo dva metoda linearizacije koja se razlikuju po tome da li je broj ćelija unutar segmenata konstantan (metod I) ili promenljiv (metod II).

Prema metodu I granice segmenata t_i^{segl} određene su na osnovu ravnomerene podele izlaza kompresora:

$$c(t_i^{segl}) = i \frac{x_{\max}}{L}, \quad i = 0, 1, \dots, L, \quad (12)$$

$$t_i^{segl} = \frac{3\sigma_{ref}}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{L}{L + i \left(\exp\left(-\frac{\sqrt{2}x_{\max}}{3\sigma_{ref}}\right) - 1 \right)} \right), \quad i = 0, 1, \dots, L. \quad (13)$$

Kako je kod ovog metoda jednak broj ćelija n unutar segmenata, određivanjem amplitudskih kvanata:

$$\Delta_i^I = \frac{t_i^{segl} - t_{i-1}^{segl}}{n}, \quad i = 1, \dots, L, \quad (14)$$

izvodimo projektovanje linearizovanog komandora:

$$t_{i,j}^I = t_{i-1}^{segl} + j\Delta_i^I, \quad i = 1, \dots, L, \quad j = 0, \dots, n, \quad (15)$$

$$y_{i,j}^I = t_{i-1}^{segl} + \frac{(2j-1)}{2} \Delta_i^I, \quad i = 1, \dots, L, \quad j = 1, \dots, n, \quad (16)$$

gde su $t_k^I = t_{i,j}^I$, $k=0, \dots, N/2$, $i=1, \dots, L$, $j=0, \dots, n$ granice ćelija, $y_k^I = y_{i,j}^I$, $k=1, \dots, N/2$, $i=1, \dots, L$, $j=0, \dots, n$, reprezentacioni nivoi a indeksi i i j ukazuju na j -tu ćeliju i -tog segmenta.

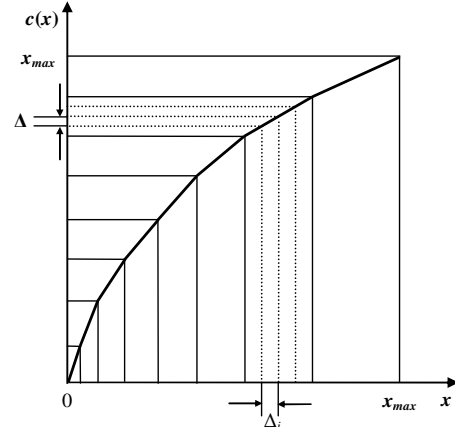
Metod II koji predstavlja suštinski doprinos ovoga rada uvodi promenljiv broj ćelija unutar susednih segmenata, pri čemu predpostavlja ekvidistantnost granica segmenata:

$$t_i^{segII} = i \frac{x_{\max}}{L}, \quad i = 0, 1, \dots, L. \quad (17)$$

Ako je N_i broj ćelija unutar i -tog segmenta, veličina amplitudskog kvanta u tom segmenatu je:

$$\Delta_i^{II} = \frac{t_i^{segII} - t_{i-1}^{segII}}{N_i} = \frac{x_{\max}}{LN_i}, \quad i = 1, \dots, L. \quad (18)$$

Slično kao kod metoda I, određujemo granice ćelija linearizovanog komandora $t_k^{II} = t_{i,j}^{II}$, $k=0, \dots, N/2$, $i=1, \dots, L$,



Sl.1. Ilustracija deo po deo linearne kompresorske funkcije

$j=0, \dots, N_i$ i reprezentacione nivoe $y_k^II = y_{i,j}^II$, $k=1, \dots, N/2$,
 $i=1, \dots, L, j=0, \dots, N_i$:

$$t_{i,j}^II = t_{i-1}^{segII} + j\Delta_i^II, \quad i=1, \dots, L, \quad j=0, \dots, N_i, \quad (19)$$

$$y_{i,j}^II = t_{i-1}^{segII} + \frac{(2j-1)}{2}\Delta_i^II, \quad i=1, \dots, L, \quad j=1, \dots, N_i. \quad (20)$$

Kako je kod linearizovanih modela gustina tačaka u okviru jednog segmenta konstantna, Benetov integral (5) se značajno usložnjava, pa se kod oba metoda granularna distorzija D_g , slično kao (6), određuje na osnovu izraza:

$$D_g = 2 \sum_{i=1}^L \frac{\Delta_i^2}{12} P_i, \quad (21)$$

$$P_i = \int_{t_{i-1}^{seg}}^{t_i^{seg}} p(x) dx = \frac{\exp\left(-\frac{\sqrt{2}t_{i-1}^{seg}}{\sigma}\right) - \exp\left(-\frac{\sqrt{2}t_i^{seg}}{\sigma}\right)}{2}, \quad (22)$$

a distorzija prekoračenja D_p :

$$D_p = 2 \int_{x_{\max}}^{\infty} (x - y_{N/2})^2 p(x) dx, \quad (23)$$

$$y_{N/2} = x_{\max} - \frac{\Delta_L}{2}. \quad (24)$$

Određivanjem ukupne distorzije D odnosno zbira granularne D_g i distorzije prekoračenja D_p može se odrediti i odnos signal-šum kvantizacije $SQNR$ [1], [5]:

$$SQNR = 10 \log \left(\frac{\sigma^2}{D} \right). \quad (25)$$

Kako su kod oba metoga D_g , D_p i $SQNR$ određeni istim jednačinama (21)-(25), privremeno smo izostavili oznake koje ukazuju na to o kom metodu je reč.

Kao što je već rečeno metod II definiše različit broj ćelija unutar segmenta. U cilju optimizacije broja ćelija po segmentima odnosno optimizacije gustine reprezentacionih nivoe formiramo proširenu funkciju:

$$J = D_g + \lambda \sum_{j=1}^L N_j, \quad (26)$$

odnosno primenjujemo tehniku Lagranževih multiplikatora [9]. Diferenciranjem funkcije J i izjednačavamo sa nulom:

$$\frac{\partial J}{\partial N_i} = 0, \quad i=1, \dots, L, \quad (27)$$

uz poštovanje ograničenja:

$$\sum_{j=1}^L N_j = \frac{N}{2}, \quad (28)$$

izvodimo uslov koji treba da ispunjava optimalna gustina reprezentacionih nivoe $\lambda(x)$:

$$\lambda(x) = \frac{8x_{\max}^2 \left(\sum_{i=1}^L \sqrt[3]{P_i} \right)^3}{3L^2 N^3}, \quad (29)$$

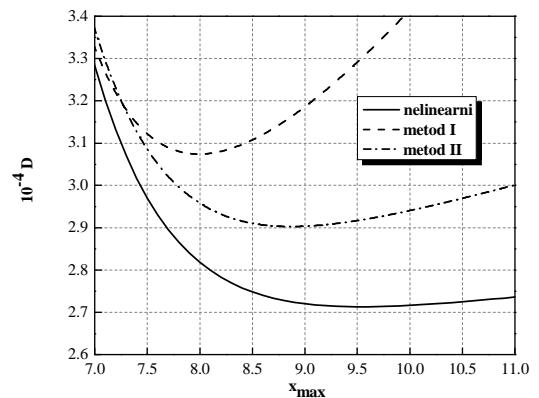
odnosno određujemo optimalan broj ćelija po segmentima za razmatrani broj segmenata:

$$N_i = \frac{NP_i^{1/3}}{2 \sum_{i=1}^L P_i^{1/3}}, \quad i=1, \dots, L. \quad (30)$$

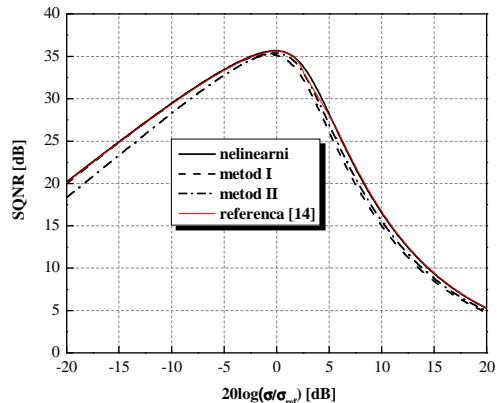
III. REZULTATI I DISKUSIJA

Uvođenjem linearizacije kod neuniformne kvantizacije smanjuje se vreme enkodovanja obzirom da se algoritam enkodovanja ne bazira na potpunom pretraživanju kodne knjige kao što je to slučaj kod nelinearnih modela. Naime kod linearizovanih modela najpre se pronalazi odgovarajući segment kome odmerak koji se koduje pripada nakon čega se ispituju samo ćelije koje pripadaju tom segmentu. Kada svemu ovome pridodamo i činjenicu da je u praksi jednostavnije realizovati linearne modele, može se izvesti zaključak o nesumljivom značaju linearizacije.

Kako bi linearizovani model predstavljao dostojnu zamenu izvornog nelinearnog modela, važan je pravilan izbor amplitudskog opsega kvantizera [10]–[13]. U tom cilju potrebno je izvršiti optimizaciju odnosa signal-šum kvantizacije koju je veoma teško ostvariti analitički jer mnogi parametri kvantizera posredno zavise od veličine amplitudskog opsega kvantizera x_{\max} . Zbog toga smo se opredelili za numeričko određivanje amplitudskog opsega poštujući kriterijum minimuma distorzije. Tako smo odredili da se izborom veličine amplitudskog opsega od $x_{\max}^{nel}=9.5$ za model nelinearnog komandora postiže minimum distorzije odnosno maksimum $SQNR$ -a od 35.6651 dB (Sl. 1. i Sl. 2.). Primenom istog principa optimizovali smo veličine amplitudskih opsega predloženih modela kvantizera. Ustanovili smo da se izborom širine amplitudskog opsega od $x_{\max}^I=8$ i $x_{\max}^{II}=8.9$ postiže maksimum $SQNR$ -a od 35.1228 dB i 35.3718 dB za metod I i metod II, respektivno. Za ovako određene veličine amplitudskih opsega, na Sl. 2. su prikazana dinamike $SQNR$ -a u širokom opsegu snaga od 40 dB. Sa Sl. 2. se može primetiti da se primenom metode II za $\sigma < \sigma_{ref}$ postiže nešto niži kvalitet od optimalnog dok se pri $\sigma > \sigma_{ref}$ kvalitet znatno popravlja. Radi boljeg sagledavanja rezultata prikazanih na Sl. 2. opredelili smo se da uvedemo



Sl. 1. Ilustracija uticaja izbora veličine amplitudskog opsega kvantizera na distorziju kvantizera.



Sl. 2. Ilustracija odnosa signal-šum kvantizacije u širokom dinamičkom opsegu snaga.

TABELA 1: PRIKAZ NUMERIČKIH VREDNOSTI ODNOSA SIGNAL-ŠUM KVANTIZACIJE ZA RAZLIČITE VREDNOSTI FAKTORA ρ

ρ	$SQNR^{net}$	$SQNR^I$	$SQNR^{II}$	$SQNR^{ref[14]}$
0.1	20.1775	19.9975	18.3457	20.0795
0.5	32.7098	32.7046	31.9456	32.5976
1	35.6651	35.1228	35.3718	35.6079
2	25.5246	23.4560	24.2498	25.6976
10	5.2724	4.7629	4.9469	5.3217

TABELA 2: ILUSTRACIJA ODSUPANJA PERFORMANSI LINEARIZOVANIH MODELA OD PERFORMANSI NELINEARNOG MODELA ZA RAZLIČITE VREDNOSTI FAKTORA ρ

ρ	$\Delta SQNR^I$	$\Delta SQNR^{II}$
0.1	0.1800	1.8318
0.5	0.0052	0.7642
1	0.5423	0.2933
2	2.0686	1.2748
10	0.5095	0.3255

faktor $\rho = \sigma / \sigma_{ref}$ [14] i da za različite vrednosti ovog faktora prikazemo vrednosti $SQNR$ -a razmatranih modela komandora. Uvedeni faktor zapravo definiše odstupanje ulazne varijanse od referentne za koju je izvedeno projektovanje kvantizera. Napomenimo i to da smo kako na Sl. 2. tako i u Tabeli 1 prikazali i vrednosti $SQNR$ -a koje se dobijaju primenom asimptotske formule izvedene u [14], za koju je ustanovljeno da dozvoljava odstupanje od optimalnih vrednosti do 1%. Dodatno, u Tabeli 2 prikazali smo odstupanje $SQNR$ -a linearizovanih modela od $SQNR$ -a nelinearnog modela za različite vrednosti faktora ρ . Na osnovu rezultata prikazanih u Tabeli 2 može se primetiti da za $\rho < 1$ metoda I postiže bolje praćenje performansi nelinearnog modela dok je za $\rho > 1$ prednost na strani metoda II.

IV. ZAKLJUČAK

U radu su predložena dva metoda linearizacije optimalne kompresorske funkcije. Izvedeno je projektovanje kako nelinearnog, tako i dobijenih linearizovanih modela kvantizera, nakon čega su određene

performanse ovih modela za predpostavljeni Laplasov izvor. Kada se prethodno obrazloženim prednostima uvođenja linearizacije doda i rezultat koji govori da se predloženim metodama linearizacije postižu performanse bliske onima koje daje nelinearni model, evidentan je doprinos ostvaren u ovom radu.

LITERATURA

- [1] A. Gersho and R. M. Gray, *Vector Quantization and Signal Compression*. Boston, Dordrecht, London: Kluwer Academic Publishers, 1992, ch. 5, pp. 133-172.
- [2] Y. Q. Shi and H. Sun, *Image and video compression for multimedia engineering: Fundamentals, Algorithms, and Standards*. New York: Crc Press Inc, 2008, 2nd ed., ch. 2, pp. 31-44.
- [3] J. D. Gibson, *The communications handbook*. New York: Crc Press Inc, 2002, 2nd ed., ch. 3, pp. 31-39.
- [4] W. C. Chu, *Speech coding algorithms, Foundation and Evolution of Standardized Coders*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2003, ch 5-6, pp. 143-183.
- [5] N. S. Jayant and P. Noll, *Digital Coding Of Waveforms, Principles and Applications to Speech and Video*. New Jersey: Prentice Hall, 1984, 2nd ed., chs. 4-5, pp. 115-251.
- [6] L. R. Rabiner and R. W. Schafer, "Introduction to Digital Speech Processing", *Foundations and Trends in Signal Processing*, vol. 1, pp. 1-194, Jan. 2007.
- [7] D. Kazakos and K. S. Makki, "Robust Companders", in *Proc. 6th WSEAS Int. Conf. on Telecommunications and Informatics*, Dallas, Texas, pp. 32-35, 2007.
- [8] D. Kazakos and K. S. Makki, "Piecewise Linear Companders are Robust", in *Proc. 12th Biennial IEEE Conf. on Electromagnetic Field Computation*, Miami, pp. 462-462, 2006.
- [9] D. P. Bertsekas, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*: Athena Scientific, 1996.
- [10] S. Na, "On the Support of Fixed-Rate Minimum Mean-Squared Error Scalar Quantizers for a Laplacian Source", *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 50, no. 5, pp. 937-944, May 2004.
- [11] Z. Peric, J. Nikolic and D. Pokrajac, "Estimation of the support region for Laplacian source scalar quantizers", *Journal of Electrical Engineering*, vol. 58, no. 1, pp. 47-51, 2007.
- [12] Z. Peric, J. Nikolic and D. Pokrajac, "Analysis of support region for Laplacian source's scalar quantizers", in *Proc. 7th IEEE Conf. Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services TELSIKS 2005*, Niš, Serbia and Montenegro, 28-30 September 2005, vol. 2, pp. 491-494.
- [13] S. Na and D. L. Neuhoff, "On the Support of MSE-Optimal, Fixed-Rate Scalar Quantizers", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 47, no. 7, pp. 2972-2982, 2001.
- [14] Sangsin Na, "Asymptotic Formulas for Mismatched Fixed-Rate Minimum MSE Laplacian Quantizers", *IEEE Signal Processing Letters*, vol: 15, pp. 13-16, 2008.

ABSTRACT

This paper proposes two methods for linearization of the optimal compression function that differ in the fact whether, after the linearization is carried out, the number of representation levels within the segments is constant or is changing. Optimization of the representation levels density for the method with the changing number of levels is performed using the Lagrange multipliers technique. The basic nonlinear model as well as obtained linearized models are designed for the assumed Laplacian source. Finally, a detail performance analysis of the considered companders is provided in the paper.

LINEARIZATION OF THE OPTIMAL COMPRESSION FUNCTION

Zoran H. Peric, Jelena R. Nikolic