Nova generalna klasa eksplicitnih filtarskih funkcija izvedenih Christoffel-Darboux-ovom formulom za klasične kontinualne ortonormirane Jacobi-jeve polinome

Vlastimir D. Pavlović, *Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Republika Srbija* i
Aleksandar D. Ilić, *RATEL - Republička agencija za telekomunikacije, Republika Srbija*

***Sadržaj* — U radu je izvedeno izrazito značajno novo generalno rešenje prototipske kontinualne fitarske funkcije parnog i neparnog reda. Polazni stav rešavanja problema aproksimcije jeste najdirektnija primena Christoffel-Darboux-ove formule za inicijalni set kontinualnih Jacobi-jevih ortogonalnih polinoma na konačnom intervalu [-1, +1] sa raspodelom u potpunosti definisanom težinskom funkcijom sa dva slobodna realna parametra. Pokazano je da se iz dobijenog eksplicitnog kompaktnog rešenja za monotone i nemonotone polinomske filtarske funkcije na jednostavan način, samo izborom vrednosti slobodnih realnih parametara, generišu reprezentativne Jacobi-jeve filtarske funkcije. Pored toga, uz isti kriterijum aproksimacije su predložena i rešenja za generisanje, partikularnim specificiranjem slobodnih parametara, odgovarajučih najpoznatijih klasičnih funkcija aproksimacije: Gegenbauer-ove, Legendre-ove i Chebyshev-ljeve prve i druge vrste. Predložena nova klasa filtarskih funkcija se izvanredno približava idealnoj filtarskoj karakteristici.**

***Ključne reči* — Filtarske funkcije, Jacobi-jevi ortogonalni polinomi, Christoffel-Darboux-ova formula.**

I. UVOD

ISTRAŽIVANJE filtarskih funkcija opisano u radovima [1] i [2] za Gegenbauer-ove, Legendre-ove, i Chebyshev-ljeve polinome prve i druge vrste, respektivno, je nastavljeno aproksimacijom sa direktnom primenom klasičnih ortogonalnih kontinualnih Jacobi-jevih polinoma sa dva slobodna realna parametra na intervalu ortogonalnosti [-1,+1] i raspodelom definisanom težinskom funkcijom $\omega(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, gde je $x\in[-1,+1]$ i α, $\beta>-1$.

Filtarske funkcije generalno važe za pasivne i aktivne realizacije vremenski kontinualnih filtara ili digitalnih filtara. Nove prestižne tehnologije za realizaciju kaskadnih aktivnih filtara i oscilatora su opisane u literaturi [3-12].

CDTA je vrsta novih aktivnih elemenata, koji kombinuju OTA sa CCII. Njihov ulazni kraj je virtuelno uzemljen, izlazna impedansa im je beskonačna, a njihova transkonduktansa se može podešavati linearno. Stoga se strujnim CDTA postižu bolje performanse u odnosu na one postignute CCII, CCCII, OTA i CCCDTA elementima. Ovo je pogodno kod realizacija oscilatora koji rade u strujnom modu u literaturi [11], i univerzalnog filtra sa strujnim modom u literaturi [3-12]. Međutim, pomenuti filtri su samo drugog reda. Filtri višeg reda sa strujnim modom upotrebom MO-CDTA tehnologije su retko istraživani. U MO-CDTA tehnici se mogu projektovati band-pass filtri drugog reda, kao i VF i NF band-stop filtri. Band-pass filtri sa konačnim nulama prenosa se uspešno projektuju kaskadnim vezivanjem MO-CDTA pojačavača, odnosno jednostavnim integrisanjem šest MO-CDTA pojačavača, šest uzemljenih kondenzatora i dva otpornika. Njihovi parametri se elektronski lako podešavaju strujom pobude MO-CDTA.

Nenegativna težinska funkcija, $\omega(x)\geq 0$, na konačnom segmentu $[-1,+1]$, određuje Jacobi-jeve polinome, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, sve do stepena faktora konstante. Specificiranje ovih faktora je označeno kao standardizacija. Za pogodno standardizovane ortogonalne polinome [14 – 21], važi sledeće:

$$\left\| P_r^{(\alpha,\beta)} \right\| = h(r,\alpha,\beta) = \int_{-1}^{+1} \omega(x)\, P_r^{(\alpha,\beta)}(x) P_r^{(\alpha,\beta)}(x)\; d(x), \quad (r=0,1,2,\ldots), \qquad (1)$$

gde je $h(r,\alpha,\beta)$, norma r-tog reda klasičnih Jacobi-jevih ortogonalnih polinoma, $P_r^{(\alpha,\beta)}(x)$.

Ako sledeći integral, $I_{\min}$, postoji (detaljna analiza je data u [2]),

$$I_{\min} = \int_{-1}^{+1} \left| f(x) - y(x) \right|^2 d\,\alpha(x), \qquad (2)$$

imamo Fourier-ov razvoj:

$$f(x) \sim \sim c_0^{(\alpha,\beta)} P_0(x) + c_1^{(\alpha,\beta)} P_1(x) + c_2^{(\alpha,\beta)} P_2(x) + \ldots + c_m^{(\alpha,\beta)} P_m(x) + \ldots \qquad (3)$$

Fourier-Jacobi-jevi spektralni koeficijenti, $c_m^{(\alpha,\beta)}$, za $m=0,1,2,\ldots$, mogu se definisati na način:

$$c_m^{(\alpha,\beta)} = \int_{-1}^{+1} f(x) P_m(x)\, d\,\alpha(x), \; m=0,1,2,\ldots \qquad (4)$$

Minimum integrala (2) je:

$$I_{\min} = \int_{-1}^{+1} \left| f(x) \right|^2 d\,\alpha(x) - \sum_{r=0}^{m} \left| c_r^{(\alpha,\beta)} \right|^2. \qquad (5)$$

Za zadato konačno m imamo sumarnu Christoffel-Darboux-ovu formulu:

$$\left\{P_0^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}^2 + \left\{P_1^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}^2 + \ldots + \left\{P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\right\}^2 = \frac{k_m}{k_{m+1}} \left(P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \frac{\partial}{\partial x}\left\{P_{m+1}^{(\alpha,\beta)}(x)\right\} - P_{m+1}^{(\alpha,\beta)}(x) \frac{\partial}{\partial x}\left\{P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\right\} \right), \qquad (6)$$

gde k_m označava najveći koeficijent polinoma $P_m^{(\alpha,\beta)}(x)$.

V. D. Pavlović, University of Niš, Faculty of Electronics, Department of Electronics, P.O. Box 73, 18000 Niš, Republic of Serbia; (phone: +381-18-529206; fax: +381-18-584448;
e-mail: vlastimir.pavlovic@elfak.ni.ac.rs).

A.D. Ilić, RATEL - Republic Telecommunication Agency, Višnjićeva 8, 11000 Belgrade, Republic of Serbia; (phone/fax: +381-18-561254; e-mail: aleksandar.ilic@ratel.rs).

Formula (5) ili formula (6), se može koristiti za aproksimaciju kontinualnih polinomskih funkcija sa normom r-tog reda, izraženom sa:

$$h_r = h(r,\alpha,\beta) = \int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} P_r^{(\alpha,\beta)}(x) P_r^{(\alpha,\beta)}(x)\, d(x), \quad r = 1, 2, 3, \ldots, \tag{7}$$

ili normom $h_r = h(r,\alpha,\beta)$, izraženom u eksplicitnoj kompaktnoj formi preko Gamma funkcije:

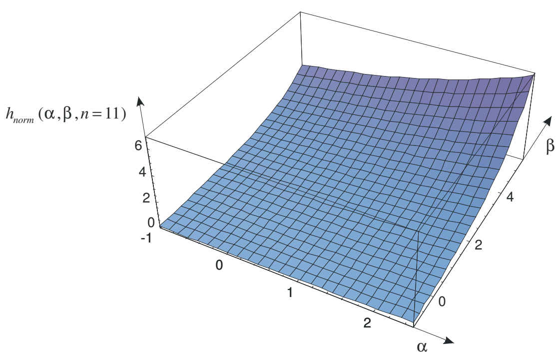
$$h_r = h(r,\alpha,\beta) = \frac{2^{(\alpha+\beta+1)}\,\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{(2r+\alpha+\beta+1)\, n!\, \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, \quad r = 1, 2, 3, \ldots. \tag{8}$$

Za vrednosti slobodnih parametara, $\alpha=11+0.11$ i $\beta=0.33$, funkcija norme data izrazom (8) ima vrednost:

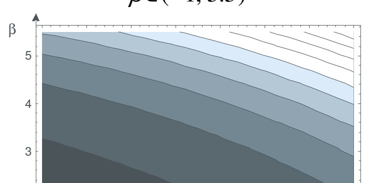
A. Primer 1:

$h(r,\alpha,\beta) = h(11, +0.11, +0.33) = 0.115393$.

3D grafik i konturni grafik za funkciju norme, $h_r = h(r,\alpha,\beta)$, za $n=11$ i vrednosti parametara u opsegu $\alpha \in (-1, 2.5)$ i $\beta \in (-1, 5.5)$ prikazani su na Sl. 1 i Sl. 2, respektivno.



Sl. 1. 3D grafik $h_{norm}(\alpha,\beta,n=11)$ za $\alpha \in (-1, 2.5)$ i $\beta \in (-1, 5.5)$.



Sl. 2. Konturni grafik $h_{norm}(\alpha,\beta,n=11)$ za $\alpha \in (-1, 2.5)$ i $\beta \in (-1, 5.5)$.

Formulama (5) i (6) se ostvaruje veza između ekstremalnih svojstava ortogonalnih polinoma i karakteristične funkcije, $A_n(\omega^2)$, filtarske funkcije.

II. Izvođenje karakteristične funkcije

Karakteristična funkcija filtarske funkcije se može odrediti kvadratom ortonormiranih Jacobi-jevih polinoma,

$$P_{k,norm}^{(\alpha,\beta)}(x)\, P_{k,norm}^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\, P_k^{(\alpha,\beta)}(x)}{h(r,\alpha,\beta)}, \quad r = 1, 2, 3, \ldots, \tag{9}$$

gde su α i β realni slobodni parametri, koji definišu klasu filtarskih funkcija.

Primenom svojstva ortogonalnosti i definicije Christoffel-Darboux-ove formule za klasične ortonormirane ortogonalne Jacobi-jeve polinome, možemo izvesti karakterističnu funkciju, $A_n(\omega^2)$, filtarske funkcije u obliku:

$$A_n(\alpha,\beta,\omega^2) = \frac{\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{(P_r^{(\alpha,\beta)}(+\omega)+(-1)^r P_r^{(\alpha,\beta)}(-\omega))^2+(P_r^{(\alpha,\beta)}(+\omega)-(-1)^r P_r^{(\alpha,\beta)}(-\omega))^2}{h(r,\alpha,\beta)}}{\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{(P_r^{(\alpha,\beta)}(+1)+(-1)^r P_r^{(\alpha,\beta)}(-1))^2+(P_r^{(\alpha,\beta)}(+1)-(-1)^r P_r^{(\alpha,\beta)}(-1))^2}{h(r,\alpha,\beta)}}, \tag{10}$$

sa normalizacijom, tako da je $A_n(\alpha,\beta,\omega_p=1)=1$, gde je ω_p granična frekvencija propusnog opsega.

B. Primer 2:

Za neparno n, $n=7$ i realne vrednosti parametara $\alpha=1.1$ i $\beta=0.22$, određena je karakteristična funkcija, $A_7(\alpha,\beta,\omega^2)$:

$$A_7(\alpha,\beta,\omega^2) = 0.03664\,\omega^2 - 0.4651\,\omega^4 + 5.107\,\omega^6 + 23.72\,\omega^8 + 54.74\,\omega^{10} - 60.55\,\omega^{12} + 25.86\,\omega^{14}. \tag{11}$$

C. Primer 3:

Za parno n, $n=8$ i realne vrednosti parametara $\alpha=1.1$ i $\beta=0.22$, izvedena je karakteristična funkcija, $A_8(\alpha,\beta,\omega^2)$:

$$A_8(\alpha,\beta,\omega^2) = 0.002709\,\omega^2 + 0.4759\,\omega^4 - 6.052\,\omega^6 + 37.56\,\omega^8 - 121.2\,\omega^{10} + 210.5\,\omega^{12} + 185.9\,\omega^{14} + 65.58\,\omega^{16}. \tag{12}$$

D. Primer 4:

Za slobodne parametre $\alpha=\beta=\lambda-1/2$ u formuli (10) za $A_n(\alpha,\beta,\omega^2)$ dobijamo Gegenbauer-ovu funkciju filtra upotrebom Christoffel-Darboux-ove sumacione formule:

$$A_n(\alpha=\lambda-1/2, \beta=\lambda-1/2, \omega^2) = \frac{\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{(P_r^{(\alpha,\beta)}(+\omega)+(-1)^r P_r^{(\alpha,\beta)}(-\omega))^2+(P_r^{(\alpha,\beta)}(+\omega)-(-1)^r P_r^{(\alpha,\beta)}(-\omega))^2}{h(r,\alpha,\beta)}}{\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{(P_r^{(\alpha,\beta)}(+1)+(-1)^r P_r^{(\alpha,\beta)}(-1))^2+(P_r^{(\alpha,\beta)}(+1)-(-1)^r P_r^{(\alpha,\beta)}(-1))^2}{h(r,\alpha,\beta)}} \tag{13}$$

gde je slobodni realan parametar λ, određen izrazom $\lambda=\alpha+1/2=\beta+1/2$. Za ovu vrednost slobodnog realnog parametra λ, dobijamo da je $P_r^{(\alpha,\beta)}=C_r^{(\lambda)}$, gde je $C_r^{(\lambda)}$ ortogonalni Gegenbauer-ov polinom r-tog reda. Prema tome, imamo:

$$A_n(\alpha=\lambda-1/2, \beta=\lambda-1/2, \omega^2) = \frac{\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{(C_r^{(\lambda)}(+\omega)+(-1)^r C_r^{(\lambda)}(-\omega))^2+(C_r^{(\lambda)}(+\omega)-(-1)^r C_r^{(\lambda)}(-\omega))^2}{h(r, \lambda-1/2, \lambda-1/2)}}{\displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{(C_r^{(\lambda)}(+1)+(-1)^r C_r^{(\lambda)}(-1))^2+(C_r^{(\lambda)}(+1)-(-1)^r C_r^{(\lambda)}(-1))^2}{h(r, \lambda-1/2, \lambda-1/2)}}. \tag{14}$$

E. Primer 5:

Za jednake vrednosti slobodnih realnih parametara $\alpha=\beta=0$, slobodni parametar λ ima vrednost $\lambda=+1/2$ a formula (13) za $A_n(\alpha,\beta,\omega^2)$, dobija upotrebom Christoffel-Darboux-ove sumacione formule, oblik Legendre-ove filtarske funkcije :

$$A_n(\alpha=0,\beta=0,\omega^2)=$$
$$=\frac{\sum_{r=1}^{n}\frac{(P_r^{(0,0)}(+\omega)+(-1)^r P_r^{(0,0)}(-\omega))^2+(P_r^{(0,0)}(+\omega)-(-1)^r P_r^{(0,0)}(-\omega))^2}{h(r,0,0)}}{\sum_{r=1}^{n}\frac{(P_r^{(0,0)}(+1)+(-1)^r P_r^{(0,0)}(-1))^2+(P_r^{(0,0)}(+1)-(-1)^r P_r^{(0,0)}(-1))^2}{h(r,0,0)}}. \tag{15}$$

Odnosno, za $\alpha=\beta=0$ imamo da $P_r^{(0,0)}=P_r$, gde je P_r Legendre-ov ortogonalni polinom r-tog reda, pa je:

$$A_n(\omega^2)=$$
$$=\frac{\sum_{r=1}^{n}\frac{(P_r(+\omega)+(-1)^r P_r(-\omega))^2+(P_r(+\omega)-(-1)^r P_r(-\omega))^2}{1+2r}}{\sum_{r=1}^{n}\frac{(P_r(+1)+(-1)^r P_r(-1))^2+(P_r(+1)-(-1)^r P_r(-1))^2}{1+2r}}. \tag{16}$$

F. Primer 6:

Za vrednosti slobodnih parametara $\alpha=\beta=-1/2$, odnosno slobodnog parametra $\lambda=0$, formula (13) za $A_n(\alpha,\beta,\omega^2)$ dobija upotrebom Christoffel-Darboux-ove sumacione formule, oblik Chebyshev-ljeve filtarske funkcije prve vrste:

$$A_n(\alpha=-1/2,\beta=-1/2,\omega^2)=$$
$$=\frac{\sum_{r=1}^{n}\frac{(P_r^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(+\omega)+(-1)^r P_r^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(-\omega))^2+(P_r^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(+\omega)-(-1)^r P_r^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(-\omega))^2}{h(r,-1/2,-1/2)}}{\sum_{r=1}^{n}\frac{(P_r^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(+1)+(-1)^r P_r^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(-1))^2+(P_r^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(+1)-(-1)^r P_r^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(-1))^2}{h(r,-1/2,-1/2)}} \tag{17}$$

jer se za $\alpha=\beta=-1/2$ dobija da je $P_r^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}=T_r$, gde je T_r Chebyshev-ljev ortogonalni polinom prve vrste r-tog reda, a tada važi da je:

$$A_n(\alpha=-1/2,\beta=-1/2,\omega^2)=$$
$$=\sum_{r=1}^{n}\frac{(T_r(+\omega)+(-1)^r T_r(-\omega))^2+(T_r(+\omega)-(-1)^r T_r(-\omega))^2}{n}. \tag{18}$$

G. Primer 7:

Za vrednosti jednakih parametara $\alpha=\beta=+1/2$, slobodni parametar λ dobija vrednost $\lambda=1$, a formula (13) za $A_n(\alpha,\beta,\omega^2)$ dobija oblik Chebyshev-ljeve filtarske funkcije druge vrste:

$$A_n(\alpha=+1/2,\beta=+1/2,\omega^2)=$$
$$=\frac{\sum_{r=1}^{n}\frac{(P_r^{(+\frac{1}{2},+\frac{1}{2})}(+\omega)+(-1)^r P_r^{(+\frac{1}{2},+\frac{1}{2})}(-\omega))^2+(P_r^{(+\frac{1}{2},+\frac{1}{2})}(+\omega)-(-1)^r P_r^{(+\frac{1}{2},+\frac{1}{2})}(-\omega))^2}{h(r,+1/2,+1/2)}}{\sum_{r=1}^{n}\frac{(P_r^{(+\frac{1}{2},+\frac{1}{2})}(+1)+(-1)^r P_r^{(+\frac{1}{2},+\frac{1}{2})}(-1))^2+(P_r^{(+\frac{1}{2},+\frac{1}{2})}(+1)-(-1)^r P_r^{(+\frac{1}{2},+\frac{1}{2})}(-1))^2}{h(r,+1/2,+1/2)}} \tag{19}$$

odnosno, pošto za $\alpha=\beta=+1/2$ imamo da je $P_r^{(+\frac{1}{2},+\frac{1}{2})}=U_r$, gde je U_r Chebyshev-ljev ortogonalni polinom druge vrste r-tog reda, sada prethodni izraz ima:

$$A_n(\alpha=+1/2,\beta=+1/2,\omega^2)=$$
$$=\frac{\sum_{r=1}^{n}(U_r(+\omega)+(-1)^r U_r(-\omega))^2+(U_r(+\omega)-(-1)^r U_r(-\omega))^2}{\sum_{r=1}^{n}(U_r(+1)+(-1)^r U_r(-1))^2+(U_r(+1)-(-1)^r U_r(-1))^2}. \tag{20}$$

III. Analiza predloženih filtarskih funkcija

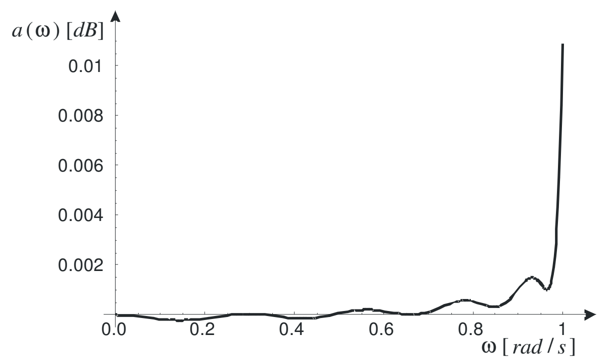
Za dati red filtarske funkcije i zadate slobodne parametre α i β primenom izraza (13) nalazimo karakterističnu funkciju filtra. Smenom $s^2=-\omega^2$ i standardnom procedurom izračunavamo polove filtarske funkcije [1, 2].

A. Primer filtarske funkcije parnog reda

Amplitudska karakteristika predložene filtarske funkcije parnog reda, za $n=10$, određena jednačinom (13) za numeričke vrednosti slobodnih parametara $\rho=0.05$, $\alpha=-0.22$ i $\beta=-0.55$ je prikazana na Sl. 3. Neke vrednosti slabljenja u nepropusnom opsegu su $a(\omega=1.5)=39.95$ [dB] i $a(\omega=2)=70.211$ [dB].

Tabela 1: Lokacije polova predloženog filtra za: $n=10$, $\rho=0.05$, $\alpha=-0.22$, $\beta=-0.55$, upotrebom jednačine (13).

Položaj polova filtarske funkcije, $s_{r,r+1}=\sigma_r \pm j\omega_r$, $r=1,2,...[(n+1)/2]$
- 0.5554562064551517± j0.1730888401627297
-0.49965477516261075± j0.5029114557165228
-0.394311794271327 73± j0.7850624982978833
-0.2512604611174746 3± j0.9921448122871769
-0.08609290358175557± j1.1024121133174833



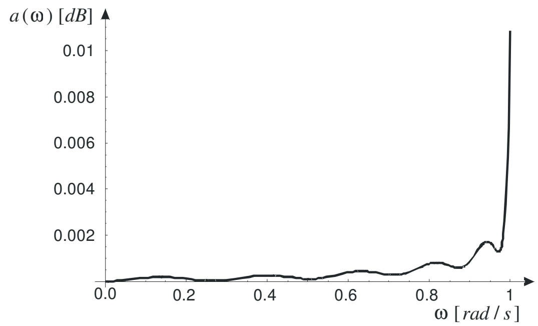
Sl. 3. Zumirana amplitudska karakteristika predložene filtarske funkcije u propusnom opsegu za $n=10$, određena jednačinom (13), za numeričke vrednosti slobodnih parametara: $\rho=0.05$, $\alpha=-0.22$ i $\beta=-0.55$.

B. Primer filtarske funkcije neparnog reda

Na Sl. 4 je prikazana amplitudska karakteristika u propusnom opsegu predložene filtarske funkcije neparnog reda, $n=11$, određene istom predloženom jednačinom (13), i vrednostima slobodnih parametara: $\rho=0.05$, $\alpha=-0.22$ i $\beta=-0.55$, sa položajima polova navedenim u Tabeli 2. Neke od karakterističnih vrednosti slabljenja u nepropusnom opsegu su $a(\omega=1.5)=47.6071$ [dB] i $a(\omega=2)=80.9456$ [dB].

TABELA 2: LOKACIJE POLOVA PREDLOŽENOG FILTRA ZA: $n=11$, $\rho=0.05$, $\alpha=-0.22$ I $\beta=-0.55$, UPOTREBOM JEDANČINE (13).

***Položaj polova filtarske fukncije* ,** $s_{r,r+1}=\sigma_r \pm j\omega_r$, $r=1,2,...[(n+1)/2]$
-0.5171041990453051
-0.49550062386635383±j0.3063830907989026
-0.43271210259575305±j0.5888213613447881
-0.33463951343264553±j0.8250579250365235
-0.21053010416629742±j0.9959333421061551
-0.07168897015339734±j1.0861898117119806



Sl. 4. Zumirana amplitudska karakteristika predložene filtarske funkcije u propusnom opsegu, reda $n=11$, određena predloženom jednačinom (13) za numeričke vrednosti slobodnih parametara $\rho=0.05$, $\alpha=-0.22$ i $\beta=-0.55$.

IV. ZAKLJUČAK

U ovom radu predlažemo reprezentativni oblik karakteristične funkcije za niskofrekventnu selektivnu polinomsku filtarsku funkciju parnog i neparnog reda sa monotonim i nemonotonim amplitudskim odzivom u propusnom opsegu, izveden na jednostavan način u kompaktnom eksplicitnom obliku, direktnom primenom Christoffel-Darboux-ove formule za klasične kontinualne ortogonalne Jacobi-jeve polinome.

Iz predloženog originalnog reprezentativnog generalnog rešenja dobijenog direktnom primenom Christoffel-Darboux-ove formule na ortogonalne Jacobi-jeve polinome je izveden set formula za partikularna rešenja filtara za poznate klasične ortogonalne polinome: Gegenbauer-ove, Legendre-ove i Chebyshev-ljeve prve i druge vrste.

Predloženi metod je posebno pouzdan u projektovanju filtarskih funkcija visokog reda.

ZAHVALNICA

Autori iskreno zahvaljuju profesorima dr Ljiljani Milić i dr Slobodanu Lazoviću, eminentnim naučnicima bez čijeg naučnog doprinosa ova istraživanja ne bi bila ostvarena.

REFERENCE

[1] A.D. Ilić, and V.D. Pavlović, "A new class of all-pole filter function synthesis by Christoffel-Darboux formula for Gegenbauer polynomials," *Proceedings XVI Telecomm. Forum-TELFOR*, Vol. 5.18., Nov. 2008.

[2] V.D. Pavlović i A.D. Ilić, "Direktna sinteza monotonih i nemonotonih filtarskih funkcija primenom Christoffel-Darboux-ove formule za klasične ortogonalne polinome", *ELEKTRO-TEHNIKA*, Vol. 51, No.5, pp. 7-14, 2006.

[3] A. Keskin and D. Biolek, "Current mode quadrature oscillator using current differencing transconductanse amplifiers (CDTA)," *IEE Proceedings-Circuits, Devices and Sistems*, Vol. 153, pp.214-218, Jun. 2006.

[4] I. Khan and S. Khawaja, "An integrable g_m-C Current mode quadrature oscillator," *International Journal of Electronics*, Vol. 87, No. 11, pp.13553-1357, Nov. 2000.

[5] D. Biolek, A. Keskin, and V. Biolkova, "Quadrature oscilator using CDTA-based integrators," *WSEAS Transactions on Electronics*, Vol.3, No. 9, pp.463'459. Sep.2006.

[6] D. Duagnmalai, S. Mangkalakeeree and M. Siripruchzanun, "High output-impedance current-mode quadrature oscillator using MO-CCCDTA," *In seventh PSU engineering conference*, 2009, Songjlu, Thailand, May, 21-22, 2009: 287-290.

[7] A. Keskin, D. Biolek and E. Hancioglu, "Current-mode KMN filter employing current differencing transconductanse amplifiers," *International Journal of Electronics Comunications (AEU)*, Vol. 60, No. 6, pp. 443-446, Jun. 2006.

[8] [9] A. Soliman, "New fully-differential CMOS second-generation current coveyer," *ETRI Journal*, Vol. 28, No. 4, pp. 495-501, Aug. 2006.

[9] M. Shahram, and T. Sait, "New current-mode current-controled universal filter with single input and three outputs," *International Journal of Electronics*, Vol. 88, No. 3, pp. 333-337, Mar. 2001.

[10] R. Nandi, et. all, "Active-R tunable integrators using a CDBA," *International Journal of Electronics*, Vol. 96, 2009. (biće publikovano)

[11] A. Keskin, "Voltage mode high Q bandpass filters and oscillators employing CDBA and minimum number of components," *International Journal of Electronics*, Vol. 92, pp 479-487, 2005.

[12] R. Nandi, "Tunable active-R oscillator using a CFA," *IEICE Electronics Express*, 5, pp. 248-253, 2008.,

[13] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, New York, USA, 1939; XXIII.

[15] M, Abramowitz and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc., New York, USA, 1964.

[16] R. Wesles, *Numerical methods for scientists and engineers*, Bell telephone laboratories, McGraw-Hill, New York, USA, 1962.

[17] D. Mitrinović, *Uvod u specijalne funkcije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1972.

[18] A. Angot, *Complements de mathematiques. Al'usage des ingeneurs de l'elektrotechnique et des telecommunications*, Paris, 1957.

[19] D. Mitrinović, and D. Đoković, *Special function*, Građevinska knjiga, Beograd, 1964.

[20] L. Grafakos, *Classical and Modern Fourier Analysis*, Pearson Education, New Jersey, USA. 2004.

[21] D.W. Kammler, *A First Course in Fourier Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, USA, 2008.

ABSTRACT

The new capital general solution of determining the prototype filter function as the response that satisfies the specifications of all pole low-pass continual time filter functions of odd and even order is presented in this paper. The approximation problem of filter function was solved mathematically, most directly applying the summed Christoffel-Darboux formula for the orthogonal polynomials. The starting point in solving the approximation problem is the direct application of the Christoffel-Darboux formula for the initial set of continual Jacobi orthonormal polynomials in the finite interval [-1,+1] in full respect to the weighting function with two free real parameters. General solution for the monotonic and non-monotonic filter functions is obtained in a compact explicit form, which is shown to enable generating of the Jacobi filter functions in a simple way by choosing the values of the free real parameters. Moreover, the proposed solution with the same criterion of approximation is used to generate the appropriate best known classical approximation functions for particular specifications of free parameters: the Gegenbauer, the Legendre and the Chebyshev filter functions of the first and second kind as well. The paper proposes new class filter functions with an excellent approach to ideal filter characteristic.

NEW GENERAL CLASS OF EXPLICIT FILTER FUNCTIONS GENERATED MOST DIRECTLY BY THE CHRISTOFFEL-DARBOUX FORMULA FOR CLASSICAL CONTINUAL ORTHONORMAL JACOBI POLYNOMIALS

Vlastimir D. Pavlović and Aleksandar D. Ilić