Izvođenje eksplicitnih klasičnih Jacobi-jevih filtarskih funkcija direktnom primenom kontinualnih ortogonalnih Jacobi-jevih polinoma

Aleksandar D. Ilić, *RATEL - Republička agencija za telekomunikacije, Republika Srbija* i Vlastimir D. Pavlović, *Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Republika Srbija*

Sadržaj **- Problem aproksimacije je rešen direktnom primenom inicijalnog seta kontinualnih Jacobi-jevih polinoma na konačnom intervalu $[-1,+1]$ u odnosu na nenegativnu težinsku funkciju sa dva slobodna realna parametra. Dobijeno je opšte rešenje za filtarske funkcije u kompaktnom eksplicitnom obliku koje na jednostavan način, izborom vrednosti slobodnih realnih parametara, generiše Jacobi-jeve klasične filtarske funkcije. Isto tako, partikularna rešenja za specificirane vrednosti slobodnih parametara, generišu dobro poznate polinomske klasične filtre: Gegenbauer-ove, Legendre-ove i Chebyshev-ljeve prve i druge vrste. Analizirani su i izvedeni primeri predloženih niskopropusnih filtarskih funkcija sa svim nulama u beskonačnosti 10-tog i 11-tog reda.**

Ključne reči **- Filtarske funkcije, klasične filtarske funkcije, klasični ortogonalni polinomi, težinska funkcija.**

I. UVOD

Novo originalno rešenje problema aproksimacije je predloženo u ovom radu, izvođenjem polinomskih niskopropusnih vremenskih kontinualnih prototipova filtarskih funkcija. Aproksimacija idealne filtarske funkcije je izvedena primenom seta kontinualnih ortogonalnih Jacobi-jevih polinoma na intervalu $[-1,+1]$ u odnosu na kontinualnu nenegativnu težinsku funkciju koja sadrži par slobodnih realnih parametara, α i β.

Brojni aktuelni problemi projektovanja mogu se rešiti izborom filtarske funkcije generisane tehnikom aproksimacije ortogonalnim polinomima. Klase ortogonalnih polinoma izvedenih kao Jacobi-jevi, Gegenbauer-ovi (ultrasferični), Chebyshev-ljevi (prve i druge vrste) i Legendre-ovi (sferični) se smatraju klasičnim [1, 3]. Neke primene ortogonalnih polinoma u teoriji filtara su opisane u radovima [4 -11].

U hijerarhiji polinomskih klasa Jacobi-jevi polinomi drže ključni položaj jer su ostale klase polinoma iz navedene grupe, za određene vrednosti realnih parametara α i β, njihova partikularna rešenja ili specijalni slučajevi. Stoga je nalaženje klase filtarskih funkcija pomoću Jacobi-jevih ortogonalnih polinoma bio izazovan zadatak.

U ovom radu predložena aproksimacija nasleđuje ekstremalna svojstva polaznih Jacobi-jevih ortogonalnih polinoma i demonstrira njihove pogodnosti primene u modernom projektovanju filtara.

A. D. Ilić, RATEL - Republic Telecommunication Agency, Višnjićeva 8, 11000 Belgrade, Republic of Serbia; (phone: +381-18-561254; e-mail: aleksandar.ilic@ratel.rs).

V. D. Pavlović, University of Niš, Faculty of Electronics, Department of Electronics, P.O. Box 73, 18000 Niš, Republic of Serbia; (phone: +381-18-529206; fax: +381-18-584448; e-mail: vlastimir.pavlovic@elfak.ni.ac.rs).

II. MATEMATIČKA REPRZENTATIVNA POZADINA

Fundamentalna funkcija, Euler-ova Gamma funkcija, $\Gamma(x)$, često se pojavljuje u predstavljanju ortogonalnih polinoma i u mnogim drugim primenama. Ova specijalna funkcija važna za razumevanje Jacobi-jevih polinoma jeste generalizacija funkcije faktorijela prirodnih brojeva i ima vrednsot $(k-1)!$ za pozitivni ceo broj k. Pored toga, ova funkcija je definisana i za necelobrojne vrednosti.

Konvencionalna definicija Euler-ove Gamma funkcije je:

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-1}t^{x-1}dt\,,\quad x>0\,. \tag{1}$$

Pozitivno realno x osigurava da ovaj integral konvergira. Rešenje gornjeg integrala (1) ima oblik,

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^{\,x-1}}{(x)_n}\,. \tag{2}$$

Jednačina (2) je Euler-ova originalna definicija Gamma funkcije.

Uvodeći Pochhammer-ov simbol, ili pomereni faktorijel, $(a)_n$, da bi se pojednostavilo označavanje, za $n>0$, definišemo:

$$(a)_n=a(a+1)(a+2)...(a+n-1)\,, \tag{3}$$

ako je n ceo broj $n>1$ i $(a)_0=1$. Napomenimo da je za negativni ceo broj, $(-m)_n=0$ ako je $m>n>0$.

U ovom radu ćemo se fokusirati na klasu ortogonalnih polinoma poznatu kao Jacobi-jevi polinomi, $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Najdirektnije primenjujući (u Tabeli 1) polazne Jacobi-jeve polinome, za jednake vrednosti slobodnih realnih parametara, $\alpha=\beta$, dobijamo Gegenbauer-ove (ultrasferične) ortogonalne polinome sa samo jednim slobodnim realnim parametrom, λ. Vrednost realnog parametra $\lambda > -1/2$ je određena kao $\lambda = \alpha + 1/2$ ili $\lambda = \beta + 1/2$.

TABELA 1: HIJERARHIJA I VREDNOSTI SLOBODNIH PARAMETARA ZA KLASE KLASIČNIH ORTOGONALNIH POLINOMA.

Klasa	***Vrednosti parametara***
Jacobi	$\alpha > -1,\ \beta > -1$
Gegenbauer	$\alpha = \beta = \lambda - 1/2$ ili $\lambda = \alpha + 1/2,\ \lambda > -1/2$
Chebyshev, prve vrste	$\alpha = \beta = -1/2$ ili $\lambda = 0$
Chebyshev, druge vrste	$\alpha = \beta = +1/2$ ili $\lambda = 1$
Legendre	$\alpha = \beta = 0$ ili $\lambda = +1/2$

Rezultati koji slede u narednim jednačinama su fundametalna osnova za ovaj rad.

Izraz za Jacobi-jeve polinome se može i najdirektnije predstaviti preko hiper-geometrijskog niza:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\, {}_2F_1\left[\begin{matrix} -n,\ n+\alpha+\beta+1 \\ n+1 \end{matrix};\ \frac{1-x}{2}\right], \quad (4)$$

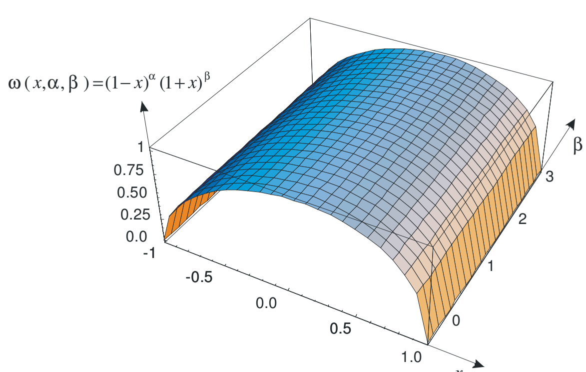
gde se pomereni faktorijel običnog hiper-geometrijskog Gauss-ovog niza eksplicitno izražava kao:

$${}_2F_1\left[a,\ b,\ c,\ x\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n\, n!} x^n . \quad (5)$$

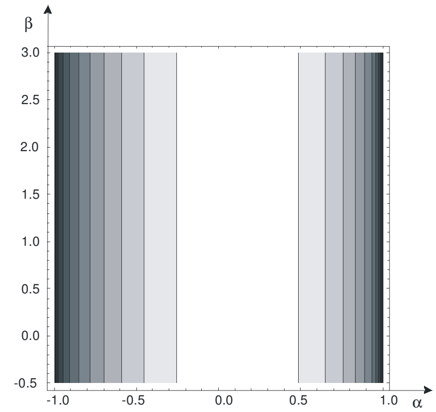
Set polinoma $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, gde je x realna promenljiva, n red kontinualnih neperiodičnih polinoma a α, $\beta > -1$ su slobodni realni parametri, naziva se ortogonalnim na konačnom intervalu $-1 \le x \le +1$ u odnosu na nenegativnu kontinualnu težinsku funkciju, $\omega(x)$, koja ima reprezentativni oblik:

$$\omega(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},\ x \in (-1,+1) \text{ i } (\alpha,\ \beta > -1) . \quad (6)$$

Na intervalu $x \in (-1, +1)$ se, za izabranu konstantnu vrednost parametra $\alpha = 0.43$ i izabrani interval vrednosti parametra $\beta \in (-0.5, 3)$, dobijaju 3D grafik i konturni grafik težinske funkcije, $\omega(x)$, prikazani na Sl. 1. A) i B), respektivno.



A)



B)

Sl. 1. A) 3D grafik površine težinske funkcije, $\omega(x,\alpha,\beta) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, na intervalu $x \in (-1, +1)$, za vrednosti parametara: $\alpha = 0.43$ i $\beta \in (-0.5, 3)$; B) Konturni grafik Jacobi-jeve težinske funkcije.

III. FILTARSKE FUNKCIJE

Za klasični Jacobi-jev polinom, može se dobiti karakteristična funkcija, $A_n(\omega^2)$, filtarske funkcije:

$$A_n(\alpha,\beta,\omega^2) = \frac{(P_n^{(\alpha,\beta)}(+\omega) + (-1)^r P_n^{(\alpha,\beta)}(-\omega))^2 + (P_n^{(\alpha,\beta)}(+\omega) - (-1)^r P_n^{(\alpha,\beta)}(-\omega))^2}{(P_n^{(\alpha,\beta)}(+1) + (-1)^r P_n^{(\alpha,\beta)}(-1))^2 + (P_n^{(\alpha,\beta)}(+1) - (-1)^r P_n^{(\alpha,\beta)}(-1))^2} \quad (7)$$

sa postavljenom normalizacijom $A_n(\alpha,\beta,\omega_p = 1) = 1$. Za zadati red filtra i zadati koeficijent refleksije u propusnom opsegu, smenom $s^2 = -\omega^2$ i standardnom tehnikom, datom u literaturi [1, 2] nalazimo polove filtra.

Predložena polinomska aproksimacija (7), koja je izvedena najdireknijom primenom formule za set kontinualnih Jacobi-jevih ortogonalnih polinoma daje za partikularna rešenja, zadatim izborom vrednosti parametara α i β, klase klasičnih filtarskih funkcija: Gegenbauer-ovih, Legendre-ovih i Chebyshev-ljevih filtarskih funkcija prve i druge vrste. Osim toga, u ovom radu je izvedena i predložena klasa klasičnih Jacobi-jevih filtarskih funkcija.

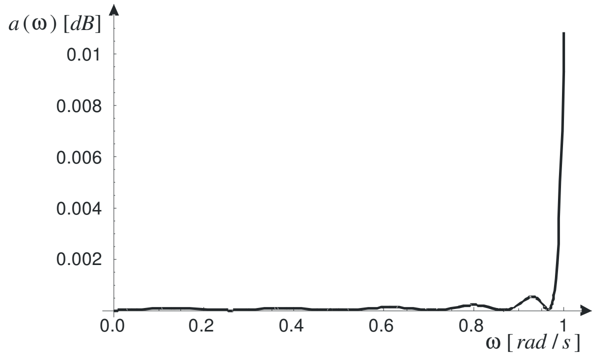
IV. KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA JACOBI-JEVOG FILTRA

A. *Primer 1:*

Lokacije polova predložene filtarske funkcije za $n = 10$, $\rho = 5\%$, $\alpha = +0.22$ i $\beta = +0.55$, su date u Tabeli 2.

TABELA 2: LOKACIJE POLOVA PREDLOŽENOG FILTRA ZA: $n = 10$, $\rho = 0.05$, $\alpha = +0.22$, $\beta = +0.55$, UPOTREBOM JEDNAČINE (7).

Položaj polova filtarske funkcije, $s_{r,\,r+1} = \sigma_r \pm j\omega_r,\ r = 1,2,....,(n+1)/2$
-0.590188887832 ± j0.1739165969345
-0.530702116060 ± j0.5054315229030
-0.418511318136 ± j0.7893357183348
-0.266414336280 ± j0.9980937122082
-0.911670827836 ± j1.1095394265720



Sl. 2. Zumirana amplitudska karakteristika predloženog klasičnog Jacobi-jevog filtra u propusnom opsegu, dobijena primenom jednačine (7) za $n=10$, $\rho=5\%$, $\alpha=+0.22$ i $\beta=+0.55$ ili $\alpha=-0.22$ i $\beta=+0.55$.

B. *Primer 2:*

Za klasični Jacobi-jev filtar, pomoću formule (7) imamo za neparno n , $n=7$ i $\rho=5\%$, $\alpha=+0.22$, $\beta=+0.55$, karakterističnu funkciju, $A_7(\omega^2)$ u obliku:

$$\begin{aligned} A_7(\omega^2) &= 1.009\omega^2 - 20.10\ \omega^4 + 148.3\omega^6 - \\ &- 512.0\omega^8 + 894.43\omega^{10} - 765.59\omega^{12} + 254.93\omega^{14} \end{aligned} \quad . \ (8)$$

C. *Primer 3:*

Za klasični Jacobi-jev filtar, pomoću formule (7) za parno n, $n=8$ i $\rho=5\%$, $\alpha=+0.22$, $\beta=+0.55$, dobijamo karakterističnu funkciju, $A_8(\omega^2)$:

$$\begin{aligned} A_8(\omega^2) &= -1.007\omega^2 + 26.12\omega^4 - 251.7\omega^6 + 1174.1\omega^8 \\ &- 2938.1\omega^{10} + 4030.8\omega^{12} - 2853.9\omega^{14} + 814.67\omega^{16} \end{aligned} \quad . \ (9)$$

Partikularna rešenja formule (7) generišu dobro poznate klasične filtarske funkcije, izvedene direktnom primenom Jacobi-jevih klasičnih ortogonalnih polinoma.

D. *Primer 4:*

Za $\alpha=+\beta=\lambda-1/2$ je dobijen Gegenbauer-ov tip filtarske funkcije sa jednim slobodnim parametrom, $\lambda=\alpha+1/2$:

$$A_n(\alpha=\lambda-1/2, \alpha=\lambda-1/2, \omega^2) = \\ = \frac{(P_n^{(\alpha,\alpha)}(+\omega)+(-1)^r P_n^{(\alpha,\alpha)}(-\omega))^2+(P_n^{(\alpha,\alpha)}(+\omega)-(-1)^r P_n^{(\alpha,\alpha)}(-\omega))^2}{(P_n^{(\alpha,\alpha)}(+1)+(-1)^r P_n^{(\alpha,\alpha)}(-1))^2+(P_n^{(\alpha,\alpha)}(+1)-(-1)^r P_n^{(\alpha,\alpha)}(-1))^2}, \quad (10)$$

to jest,

$$A_n(\alpha=\lambda-1/2, \beta=\lambda-1/2, \omega^2) = \\ = \frac{C(n,\lambda,\omega)\,C(n,\lambda,\omega)}{C(n,\lambda,\omega_p=1)\,C(n,\lambda,\omega_p=1)} \quad . \quad (11)$$

E. *Primer 5:*

Za $\alpha=+\beta=\lambda-1/2=0$ ili $\lambda=1/2$, dobijen je Legendre-ov tip filtarske funkcije:

$$A_n(\alpha=0, \beta=0, \omega^2) = \\ = \frac{(P_n^{(0,0)}(+\omega)+(-1)^r P_n^{(0,0)}(-\omega))^2+(P_n^{(0,0)}(+\omega)-(-1)^r P_n^{(0,0)}(-\omega))^2}{(P_n^{(0,0)}(+1)+(-1)^r P_n^{(0,0)}(-1))^2+(P_n^{(0,0)}(+1)-(-1)^r P_n^{(0,0)}(-1))^2} \quad (12)$$

to jest,

$$A_n(\alpha=0, \beta=0, \omega^2) = \left[\frac{P(n,\omega)}{P(n,\omega_p=1)}\right]^2 . \quad (13)$$

F. *Primer 6:*

Za $\alpha=+\beta=-1/2$ ili $\lambda=0$ je dobijena Chebyshev-ljeva filtarska funkcija prve vrste:

$$A_n(\alpha=-1/2, \beta=-1/2, \omega^2) = \\ = \frac{(P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(+\omega)+(-1)^r P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(-\omega))^2+(P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(+\omega)-(-1)^r P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(-\omega))^2}{(P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(+1)+(-1)^r P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(-1))^2+(P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(+1)-(-1)^r P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(-1))^2} \quad (14)$$

odnosno,

$$A_n(\alpha=-1/2, \beta=-1/2, \omega^2) = T(n,\omega)\,T(n,\omega) . \quad (15)$$

G. *Primer 7:*

Za $\alpha=+\beta=+1/2$ ili $\lambda=1$ je dobijena Chebyshev-ljeva filtarska funkcija druge vrste:

$$A_n(\alpha=1/2, \beta=1/2, \omega^2) = \\ = \frac{(P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(+\omega)+(-1)^r P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(-\omega))^2+(P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(+\omega)-(-1)^r P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(-\omega))^2}{(P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(+1)+(-1)^r P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(-1))^2+(P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(+1)-(-1)^r P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(-1))^2} \quad (16)$$

odnosno,

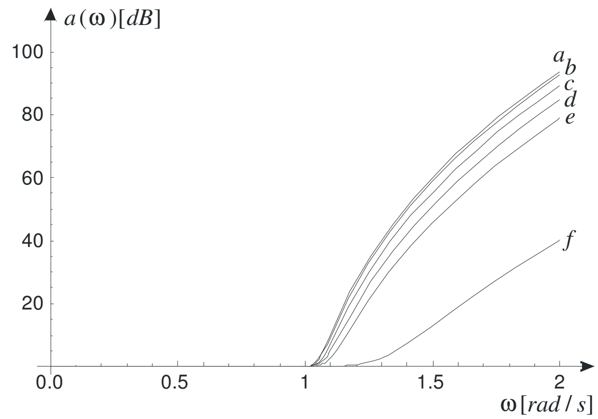
$$A_n(\alpha=1/2, \beta=1/2, \omega^2) = \left[\frac{U(n,\omega)}{U(n,\omega_p=1)}\right]^2 . \quad (17)$$

V. Opšte poređenje klasičnih filtara i predloženih rezultata projektovanja filtara

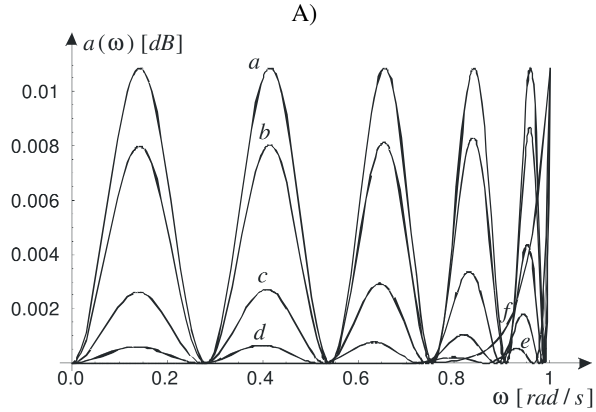
U ovom radu predloženi postupak projektovanja filtara je ilustrovan dobijenim položajima polova filtarske funkcije datim u Tabeli 3 i poređenjem normalizovanih vrednosti slabljenja na određenim frekvencijama u nepropusnom i propusnom opsegu prikazanim na Sl. 3, za filtar jedanestog reda, $n=11$, a za maksimalni koeficijent refleksije u propusnom opsegu $\rho=5\%$.

TABELA 3: LOKACIJE POLOVA PREDLOŽENOG FILTRA ZA: $n=11$, $\rho=0.05$, $\alpha=+0.22$, $\beta=+0.55$, UPOTREBOM JEDNAČINE (13).

Položaj polova filtarske funkcije, $s_{r,r+1}=\sigma_r \pm j\omega_r$, $r=1,2,....,[(n+1)/2]$
-0.550169409042
-0.5270867707538 ± j0.3074489759323
-0.4600403541833 ± j0.5910534069745
-0.3554512728879 ± j0.8285892844330
-0.2233601493958 ± j1.0007774197373
-0.0759495734952 ± j1.0919902096277



A)



B)

Sl. 3. A) Poređenje amplitudskih karakteristika klasičnih filtarskih funkcija 11-tog reda, dobijenih iz generalne formule (7);
B) Poređenje zumiranih amplitudskih karakteristika klasičnih filtara 11-tog reda u propusnom opsegu:
(*a*) Klasično rešenje sa Chebyshev-ljevim polinomima prve vrste, [izraz (7) ili (15)];
(*b*) Klasično rešenje sa Jacobi-jevim polinomima, $\alpha=-0.41$ i $\beta=-0.55$, [izraz (7)];
(*c*) Klasično rešenje sa Gegenbauer-ovim polinomima, $\lambda=0.22$, [izraz (7) ili (11)];
(*d*) Klasično rešenje sa Legendre-ovim polinomima, [izraz (7) ili (13)];
(*e*) Klasično rešenje sa Chebyshev-ljevim polinomima druge vrste, [izraz (7) ili (17)];
(*f*) Butterworth-ov tip.

VI. ZAKLJUČAK

U ovom radu predlažemo reprezentativni oblik prototipa filtarske funkcije za niskopropusnu selektivnu polinomsku filtarsku funkciju parnog i neparnog reda, izvedenu na jednostavan način u kompaktnom eksplicitnom obliku, direktnom primenom klasičnih kontinualnih ortogonalnih Jacobi-jevih polinoma za zadate numeričke vrednosti slobodnih realnih parametara α i β.

Izborom vrednosti samo dva slobodna realna parametra, α i β, za jednoznačno definisane numeričke vrednosti seta Jacobi-jevih ortogonalnih polinoma, konfigurišemo širok spektar filtarskih frekvencijskih karakteristika. Neka partikularna rešenja su klasični Gegenbauer-ovi, Legendre-ovi filtri i Chebyshev-ljevi filtri prve i druge vrste.

ZAHVALNICA

Autori se iskreno zahvaljuju profesorima dr Ljiljani Milić, dr Slobodanu Lazoviću i dr Milojku Jevtoviću, aktivnim učesnicima TELFORA, na neposrednoj pomoći i predlaganju istraživanja ostvarenih u ovom radu.

REFERENCE

[1] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, New York, USA, 1939; XXIII.
[2] M. Abramowitz, and I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc., New York, USA, 1964.
[3] D. Mitrinović, *Uvod u specijalne funkcije*, Građevinska knjiga, Beograd, 1972.
[4] M. Lutovac, and D. Rabrenović, "All-pole filters using ultraspherical polynomials," *European Conf. Circuit Theory Design*, ECCTD'91, pp.203-212, Copenhagen, Sep. 1991.
[5] B. Raković, "Designing monotonic low-pass filters-comparison of some methods and criteria," *Circuit Theory and Applications*, Vol. 2, 215-221, 1974.
[6] D. Johnson, and J. Johnson, "Low-pass filters using ultraspherical polynomials," *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-13, 364-369, 1966.
[7] B. Raković, and M. Popović, "Explicit expression for the characteristic function of generalized Legendre filters," *Circuit Theory and Applications*, Vol. 6, 363-373, 1978.
[8] B. Raković, *Characteristic functions for least mean square approximation for all pole filters*, Publ. of Electrical Engineering Faculty, University of Belgrade, **107-108**, 23-26, 1972.
[9] C. Beccari, "The use of the shifted Jacobi polynomials in the synthesis of lowpass filters," *Circuit Theory and Applications*, Vol. 7, 289-295, 1979.
[10] R.A. Petkovich, and A.D. Ilich, "Synthesis of Nonmonotonic Filters with Maximum Slope out of the Pass-band," *PROC. Internat. Symposium on Circuits and Systems IEEE*, Newport Beach, USA, 1983.
[11] A.D. Ilić, *Synthesis of New Class of Selective Filters with Non-monotonic Amplitude Characteristic*, M.Sc.EE thesis, Faculty of Electronic Engineering, University of Niš, Niš, 1991.

ABSTRACT

The starting point in solving the approximation problem is the most direct application of the initial set of continual Jacobi orthogonal polynomials in the finite interval, [-1,+1], in full respect to the nonnegative weighting function with two free real parameters. General solution for filter functions is obtained in a compact explicit form, which is shown to enable generating of the classical Jacobi filter functions in a simple way by choosing the values of the free real parameters. Also, the proposed solution of approximation is used to generate the appropriate best known classical approximation functions for particular specifications of the free parameters: the Gegenbauer, the Legendre and the Chebyshev filter functions of the first and second kind as well. The examples of proposed all-pole low-pass filter functions in frequency domain for magnitude responses of even, 10th, and odd, 11th, order are illustrated.

GENERATING OF EXPLICIT CLASSICAL JACOBI FILTER FUNCTIONS MOST DIRECTLY BY THE CONTINUAL ORTHOGONAL JACOBI POLYNOMIALS

Aleksandar D. Ilić and Vlastimir D. Pavlović