Realizacija digitalnih češljastih filtara u aritmetici sa fiksnom tačkom

Marko Nikolić

***Sadržaj* — U ovom radu se razmatra realizacija digitalnih češljastih filtara u aritmetici sa fiksnom tačkom. Na početku je prikazana efikasna rekurzivna realizacija osnovne verzije filtra sa posebnim osvrtom na problem konačne dužine reči. Zatim se posmatra nerekurzivna struktura koja se realizuje polifaznom dekompozicijom. Nakon toga se uvodi modifikovani češljasti filtar (MCF) i predlaže nerekurzivna realizaciona struktura za taj filtar. Na kraju je dat predlog višestepenog MCF decimatora/interpolatora.**

***Ključne reči* — aritmetika sa fiksnom tačkom, CIC filtri, češljasti filtri, digitalna obrada signala, konverzija frekvencije odabiranja.**

I. Uvod

Digitalni češljasti filtri predstavljaju važnu klasu filtara koji se koriste u sistemima za konverziju frekvencije odabiranja. Oni su posebno značajni u slučaju velikih faktora decimacije ili interpolacije, kod kojih klasični FIR filtri moraju biti vrlo visokog reda, dok se IIR filtri ne mogu praktično realizovati zbog efekata konačne dužine digitalne reči [1].

Posmatrana klasa filtara se odlikuje velikom ekonomičnošću, malom računskom složenošću i malom potrošnjom. Jedan od najčešće korišćenih filtara iz ove grupe je CIC filtar (eng. *Cascaded Integrator Comb filter*) koji se sastoji od kaskadne veze češljastog filtra i integratora [1]. Realizuje se bez množača, a broj sabiranja i pomeranja je minimizovan. Glavni nedostatak ovog filtra je loša frekvencijska karakteristika: velika varijacija slabljenja u propusnom opsegu i široka prelazna zona. Zbog toga je predložen veliki broj metoda za poboljšanje selektivnosti CIC filtra. Treba pomenuti metod koji se zasniva na rotaciji nula funkcije prenosa originalnog filtra [2][3], tehniku "izoštravanja filtra" [4], kao i kaskadno vezivanje FIR filtra koji kompenzuje veliku varijaciju slabljenja u propusnom opsegu [1].

Ovaj rad se fokusira na realizaciju digitalnih češljastih filtara u aritmetici sa fiksnom tačkom i problem konačne dužine digitalne reči. U toku istraživanja razvijeni su simulacioni modeli u MATLAB-u uz korišćenje *Fixed-Point Toolbox*-a.

Na početku rada je opisan CIC filtar i data je njegova efikasna realizaciona struktura. Zatim se razmatra postupak određivanja dužine registara za CIC filtar. Nakon toga je prikazana nerekurzivna polifazna struktura ekvivalentnog filtra. U radu je takođe detaljno opisan algoritam za nerekurzivnu realizaciju modifikovanog češljastog filtra [2]. Na kraju je dat predlog realizacije višestepenog decimatora/interpolatora baziranog na tom filtru.

Istraživanja prikazana u ovom radu su podržana od strane Ministarstva za nauku i tehnologiju Republike Srbije.

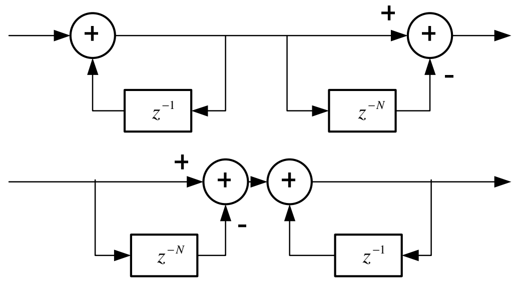
M. V. Nikolić, Institut Mihajlo Pupin, Volgina 15, 11060 Beograd, Srbija; (e-mail: marko.nikolic@institutepupin.com).

II. CIC filtar

Osnovna forma CIC filtra je dobijena polazeći od pravougaonog filtra, čiji su svi koeficijenti jednaki jedinici. Funkcija prenosa pravougaonog filtra dužine N se može predstaviti na sledeći način

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \tag{1}$$

Pravougaoni FIR filtar se može realizovati rekurzivnom strukturom koja se sastoji od kaskadne veze češljastog filtra i integratora. Ovakva realizacija pravougaonog filtra naziva se CIC filtar. Integrator i češljasti filtar mogu zameniti mesta.



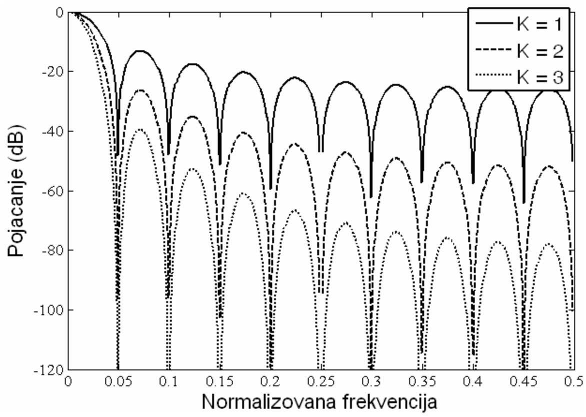
Slika 1. Blok-šema CIC filtra

Frekvencijski odziv CIC filtra dat je sledećom jednačinom

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \left|\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right| \tag{2}$$

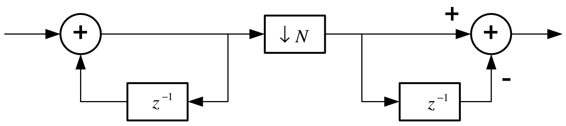
Najjednostavniji način za povećanje selektivnosti i slabljenja u nepropusnom opsegu je kaskadno vezivanje nekoliko identičnih CIC filtara. Označimo sa K broj kaskadno vezanih sekcija CIC filtra, a sa CIC(N, K) takav višestepeni filtar.

Na sl. 2. je prikazana karakteristika pojačanja CIC filtara sa različitim brojem sekcija. CIC filtar ima prirodne nule na frekvencijama k/N, gde je $k = 1, 2, ..., N/2$ za parno N, odnosno $k = 1, 2, ..., (N-1)/2$ za neparno N. Vidi se da u slučaju decimacionog filtra, nule odgovaraju centrima preklapajućih opsega.

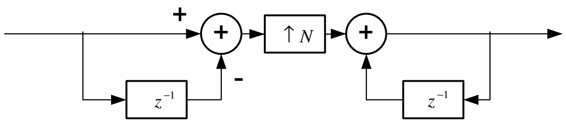


Sl. 2. Normalizovana karakteristika pojačanja CIC filtara ($N = 20$, $K = 1, 2, 3$)

Hogenauer je prvi predložio primenu CIC filtara za decimaciju i interpolaciju [5]. On je dodatno uprostio CIC filtar primenivši na njega kaskadne ekvivalencije. Takva realizacija CIC filtra je u literaturi poznata kao Hogenauerov filtar i prikazana je na sl. 3. Češljasti filtar se svodi na običan diferencijator, pa je smanjen broj elemenata kašnjenja u odnosu na osnovnu realizaciju CIC filtra. Primećuje se da diferencijatori uvek rade na nižoj frekvenciji od integratora.



(a)



(b)

Sl. 3. Hogenauerov filtar: (a) decimacioni filtar, (b) interpolacioni filtar

III. Realizacija CIC filtra

S obzirom da je integrator nestabilan filtar i da se signali predstavljaju sa konačnim brojem bita, neminovno dolazi do prekoračenja u integratorskim sekcijama u realnim slučajevima [6]. Pokazuje se da i pored ovog prekoračenja moguće dobiti korektan signal na izlazu CIC filtra [6]. Proračun dužine registara je ključni uslov za pravilno funkcionisanje CIC filtra.

Da bi se sprečilo prekoračenje signala na izlazu potrebno je koristiti aritmetiku u komplementu dvojke, a dužina registara mora biti takva da zadovolji maksimalno pojačanje filtra [6]. Za filtar CIC(N, K) porast broja bita iznosi *ceil*($K\log_2(N)$), gde je *ceil* funkcija koja zaokružuje argument na prvi veći ceo broj [6]. Pri tom ne moraju svi registri da budu maksimalne dužine. Kod interpolacionog i decimacionog filtra postoji različit pristup za smanjenje potrebnog broja bita za predstavljanje signala.

Interpolacioni filtar ima na svom ulazu sekcije češljastih filtara za kojima slede integratorske sekcije. Zbog toga u svakoj narednoj sekciji, polazeći od ulaza, dolazi do porasta signala, pa je potrebno sukcesivno povećavati dužinu registara. Porast broja bita se može odrediti tako što se izračuna impulsni odziv od ulaza CIC filtra do izlaza svake sekcije, a zatim i maksimalno pojačanje [6]. Ako sa $\{h_k[n]\}$ označimo impulsni odziv od ulaza CIC filtra do izlaza k-te sekcije maksimalno pojačanje se dobija na sledeći način [6]

$$max\_gain = \sum_{n=0}^{N_k-1} |h_k[n]| \qquad (3)$$

gde je sa N_k označena dužina filtra CIC(N, K). Porast broja bita za k-tu sekciju iznosi *ceil*($\log_2$(*max_gain*)).

U okviru ovog istraživanja, u MATLAB-u je realizovana funkcija za projektovanje interpolacionog CIC filtra *cicinterp*, čiji su argumenti dužina osnovnog filtra N, broj sekcija K, broj bita za predstavljanje signala na ulazu i objekat u aritmetici sa fiksnom tačkom kojim se definišu parametri za operacije sabiranja i množenja. Funkcija vraća objekat CIC interpolacioni filtar. Realizovana je i funkcija za filtriranje signala pomoću interpolacionog CIC filtra *cicinterp_filter*, čiji je prvi argument objekat CIC interpolacioni filtar. U Tabeli 1 su sumirani rezultati za $N = 20$ i $K = 1, 2, 3, 4$.

Tabela 1. Porast broja bita za interpolacioni CIC filtar u odnosu na ulaz

Broj sekcija	1	2	3	4
Češljasti filtar 1	1	1	1	1
Češljasti filtar 2		2	2	2
Češljasti filtar 3			3	3
Češljasti filtar 4				4
Integrator 1	5	6	7	8
Integrator 2		9	10	11
Integrator 3			13	14
Integrator 4				18

Decimacioni CIC filtar ima na svom ulazu integrator, pa je zbog toga najveća dužina registra potrebna upravo na ulazu. U slučaju decimacionog filtra vrši se odsecanje bitova najmanje težine (LSB) u svakoj narednoj sekciji. Odbačeni bitovi se mogu posmatrati kao aditivni šum. Prilikom izračunavanja potrebnog porasta broja bita u odnosu na izlaz decimacionog CIC filtra, potrebno je odrediti impulsni odziv od ulaza svake sekcije integratora ili češljastog filtra do izlaza CIC filtra. Ako sa $\{h_k'[n]\}$ označimo impulsni odziv od ulaza k-te sekcije do izlaza CIC filtra, maksimalno pojačanje snage iznosi

$$max\_power\_gain = \sum_{n=0}^{N_k-1} (h_k'[n])^2 \qquad (4)$$

Ako pretpostavimo da u najgorem slučaju aditivni šum može da poraste do 1 LSB-a na izlazu, potreban porast bita za k-tu sekciju iznosi *ceil*(0.5$\log_2$(*max_power_gain*)) [6]. Međutim, kako postoji $2K$ „izvora šuma“ potrebno je povećati dužinu registara dodatno za *ceil*($\log_2(2K)$) bita.

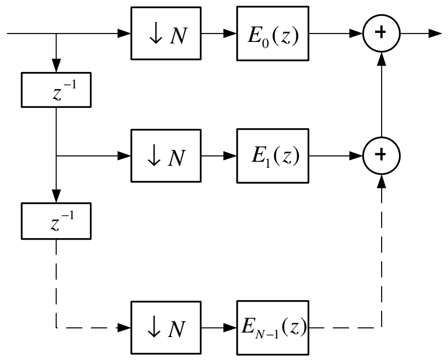
U MATLAB-u je realizovana funkcija za projektovanje decimacionog CIC filtra *cicdecim*, čiji su argumenti dužina osnovnog filtra N, broj sekcija K, broj bita za predstavljanje signala na izlazu i objekat u aritmetici sa fiksnom tačkom kojim se definišu parametri za operacije sabiranja i množenja. Funkcija vraća objekat CIC decimacioni filtar. Realizovana je i funkcija za filtriranje signala pomoću decimacionog CIC filtra *cicdecim_filter*, čiji je prvi argument objekat CIC decimacioni filtar. U Tabeli 2 su sumirani rezultati za $N = 20$ i $K = 1, 2, 3, 4$.

TABELA 2. PORAST BROJA BITA ZA DECIMACIONI CIC FILTAR U ODNOSU NA IZLAZ

Broj sekcija	1	2	3	4
Integrator 1	2	9	13	18
Integrator 2		5	10	14
Integrator 3			7	11
Integrator 4				8
Češljasti filtar 1	4	4	5	7
Češljasti filtar 2		3	4	6
Češljasti filtar 3			4	5
Češljasti filtar 4				4

IV. REALIZACIJA NEREKURZIVNE STRUKTURE ČEŠLJASTOG DIGITALNOG FILTRA

Filtar koji ostvaruje identičnu funkciju prenosa kao Hogenauerov filtar, može se realizovati pomoću nerekurzivne strukture. U tom slučaju se primenjuje polifazna dekompozicija kako bi se filtriranje obavljalo na nižoj frekvenciji odabiranja. Koeficijenti polifaznih filtara su pozitivni celi brojevi. Na sl. 4. prikazana je polifazna dekompozicija filtra za decimaciju.



Sl. 4. Polifazna dekompozicija decimacionog filtra

Polazeći od impulsnog odziva originalnog filtra, polifazne komponente se mogu lako odrediti koristeći MATLAB funkciju *downsample*. Dužina digitalne reči u polifaznim filtrima je određena porastom signala koji unose, dok je dužina reči na izlazu veća, jer se sabiraju izlazi polifaznih filtara. Taj porast se računa na identičan način kao kod interpolacionog CIC filtra.

TABELA 3. PORAST BROJA BITA ZA DECIMACIONI NEREKURZIVNI FILTAR U ODNOSU NA ULAZ

Broj sekcija	Porast bita za polifazne filtre	Porast bita na izlazu
1	0	5
2	5	9
3	9	13
4	13	18

Identični rezultati važe i za interpolacioni filtar koji se realizuje nerekurzivnom strukturom uz korišćenje polifazne dekompozicije.

V. REALIZACIJA NEREKURZIVNE STRUKTURE MODIFIKOVANOG ČEŠLJASTOG FILTARA

Jedna od značajnih modifikacija osnovnog filtra ima za cilj da smanji kvantizacioni šum kod sigma-delta A/D konvertora. Ovaj pristup se zasniva na rotaciji nula funkcije prenosa bazičnog filtra, kako bi se postigla uža prelazna zona [2][3].

Funkcija prenosa filtra kod koga su nule i pol zarotirani za ugao α je

$$H_{r+}(z) = \frac{1-e^{jN\alpha}z^{-N}}{1-e^{j\alpha}z^{-1}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\alpha} z^{-n} \tag{5}$$

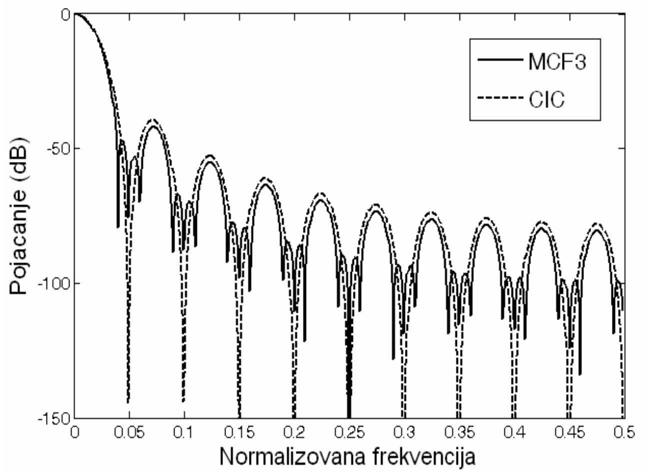
Međutim, koeficijenti takvog filtra su kompleksni, pa je neophodno kombinovati ovaj filtar sa filtrom kod koga su nule i pol zarotirani za – α, čija je funkija prenosa

$$H_{r-}(z) = \frac{1-e^{-jN\alpha}z^{-N}}{1-e^{-j\alpha}z^{-1}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\alpha} z^{-n} = H^{*}_{r+}(z) \tag{6}$$

Realan filtar predstavlja konvoluciju prethodna dva filtra. Takav filtar se u praksi kombinuje sa osnovnim filtrom čime se dobija modifikovani češljasti filtar trećeg reda MCF3(N, α)

$$H_{MC3}(z) = H_{r+}(z) H_{r-}(z) \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \tag{7}$$

Na sl. 5. prikazano je poređenje frekvencijske karakteristike MCF3 i CIC filtra trećeg reda.



Sl. 5. Poređenje frekvencijske karakteristike MCF3 i CIC filtra trećeg reda ($N = 20$, $\alpha = 0.02\pi$)

Sa sl. 5. se vidi da MCF3 ima širu zonu potiskivanja neželjenih komponenti signala oko centara preklapajućih opsega u odnosu na CIC filtar trećeg reda.

Iz jednačina (5) i (6) se vidi da bi MCF3 filtar mogao da se realizuje pomoću rekurzivne ili nerekurzivne strukture. Međutim, nula i pol koji treba da se ponište su razdvojeni u dva filtra. Zbog efekata konačne dužine reči oni se ne mogu idealno poništiti, pa rekurzivna struktura nije pogodna za praktičnu primenu.

MCF3 se može realizovati nerekurzivnom strukturom na identičan način kao i osnovni filtar koja je predstavljena na sl. 4. Za razliku od osnovnog filtra, koeficijenti MC3 filtra nisu celi brojevi. Zbog toga je potrebno povećati dužinu digitalne reči, da ne bi došlo do većeg odstupanja od željene frekvencijske karakteristike.

Postupak određivanja koeficijenata MCF3 filtra za polifaznu realizaciju se može podeliti u nekoliko koraka.

Da bi postupak bio jasniji, posmatraćemo konkretan primer filtra kod koga je $N = 5$, a $\alpha = 0.02\pi$.

Korak 1. Određivanje koeficijenata MCF3 filtra u aritmetici sa pokretnom tačkom. Za tu svrhu je u MATLAB-u realizovana funkcija *mcf3* koja daje impulsni odziv MCF3 filtra, čiji su argumenti red baznog filtra i pomeraj nula. Dobijeni koeficijenti filtra su: 1.0000, 2.9961, 5.9803, 9.9409, 4.8623, 17.8229, 18.8111, 17.8229, 14.8623, 9.9409, 5.9803, 2.9961 i 1.0000.

Korak 2. Određivanje maksimalnog pojačanja filtra (za $f = 0$) i porasta broja bita u odnosu na ulaz. Maksimalno pojačanje filtra iznosi

$$max\_gain = \sum_{n=0}^{3N-3} |h[n]| \tag{8}$$

dok se porast broja bita dobija kao $ceil(\log_2(max\_gain))$.

U konkretnom slučaju, maksimalno pojačanje iznosi 124.0161, što znači da je potreban porast od 7 bita.

Korak 3. Određivanje potrebnog broja bita za razlomljeni deo koeficijenata (*FracLen*) tako da rezultujući filtar što manje odstupa od traženog filtra. Pri tom je potrebno definisati ukupni porast broja bita (u primeru koji ilustruje postupak uzeto je 16 bita). Takođe, podrazumeva se da se razlomljeni deo koeficijenata filtra zaokružuje na najbliži ceo broj.

Najmanje odstupanje od željenog filtra u konkretnom primeru postiže se za $FracLen = 8$.

Korak 4. Izračunavanje koeficijenata filtra u aritmetici sa fiksnom tačkom na osnovu prethodnih koraka. Koeficijenti filtra se izračunavaju na sledeći način

$$h_{fixp}[n] = round(2^{FracLen} h_{flp}[n]) \tag{9}$$

gde su sa $h_{flp}[n]$ označeni koeficijenti filtra u aritmetici sa pokretnom tačkom dobijeni u koraku 1.

Tako se u posmatranom slučaju dobijaju sledeći koeficijenti: 256, 767, 1531, 2545, 3805, 4563, 4816, 4563, 3805, 2545, 1531, 767 i 256.

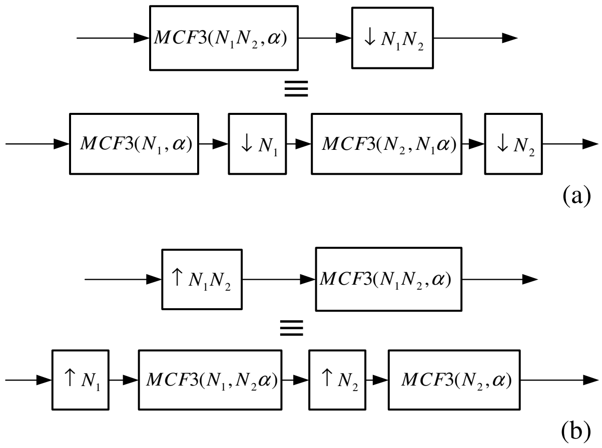
Korak 5. Određivanje polifaznih komponenti. Polifazne komponente se mogu lako odrediti korišćenjem MATLAB funkcije *downsample*. Prvi argument funkcije je niz $h_{fixp}[n]$, drugi argument N, a treći može imati vrednosti od 0 do $(N - 1)$. U konkretnom primeru dobijen je sledeći rezultat: e_0 = [256, 4563, 1531], e_1 = [767, 4816, 767], e_2 = [1531, 4563, 256], e_3 = [545, 3805], e_4 = [3805, 2545].

VI. VIŠESTEPENA DECIMACIJA/INTERPOLACIJA SA MCF3 FILTROM

Broj operacija se može dodatno smanjiti u slučaju višestepene decimacije ili interpolacije. Posmatrajmo slučaj kada je faktor decimacije/interpolacije prirodan broj. Da bi mogla da se primeni višestepena decimacija, odnosno interpolacija, potrebno je da se stepen konverzije može faktorizovati, što je čest slučaj u praksi. Tada će samo prvi stepen decimatora, odnosno poslednji stepen interpolatora, raditi na najvišoj frekvenciji odabiranja.

Posmatrajmo radi jednostavnosti slučaj dvostepenog decimatora/interpolatora i neka je ukupni faktor decimacije/interpolacije $N = N_1N_2$. Neka je rezultujući decimacioni/interpolacioni filtar MCF3(N, α). Tada se lako može pokazati primenom kaskadnih ekvivalencija da su decimacioni/interpolacioni filtri u svakom stepenu takođe MCF3 filtri, što je prikazano na sl. 6.

Ovakva realizacija je veoma jednostavna, jer su filtri u svim stepenima istog tipa, pa se može primeniti isti algoritam za njihovo projektovanje, koji je predstavljen u prethodnoj sekciji. Treba naglasiti da se prethodna ekvivalencija može sukcesivno primeniti i na decimator/interpolator sa proizvoljnim brojem stepeni.



Sl. 6. Dvostepeni MCF3 decimator/interpolator: (a) decimator, (b) interpolator

ZAHVALNICA

Želeo bih da se zahvalim Prof. Dr Ljiljani Milić na korisnim sugestijama i savetima, na osnovu kojih je značajno poboljšan kvalitet ovog rada.

LITERATURA

[1] Lj. Milić, Multirate Filtering for Digital Signal Processing: MATLAB Applications, Ed. Information Science Reference, 2009, ch. 4, 5, and 11.

[2] L. Lo Presti, "Efficient modified-sinc filters for sigma-delta A/D converters", *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Analog and Digital Signal Processing, 47(11)*, 2000, pp. 1204-1213.

[3] M. Laddomada, "Comb-Based Decimation Filters for ΣΔ A/D Converters: Novel Schemes and Comparisons", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 54*, 2007, pp. 994-1005.

[4] G. Jovanović-Doleček, S. K. Mitra, "A new two-stage sharpened comb decimator", *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Regular Papers*, *52*(7), 2005, pp. 1414-1420.

[5] E. B. Hogenauer, "An economical class of digital filters for decimation and interpolation", *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and signal processing*, *29*(2), 1981, pp. 155-162.

[6] F. J. Harris, Multirate Signal Processing for Communication Systems, Prentice Hall PTR, 2004, ch. 11

ABSTRACT

This paper considers the fixed-point implementation of comb-based digital filters. First, efficient recursive structure of the basic CIC filter is shown. A special attention is paid to the calculation of digital word-length. The nonrecursive structure of the same filter is presented, which is implemented using the polyphase decomposition. After that, the modified comb filter (MCF) is introduced. The nonrecursive implementation structure is proposed for MCF. Finally, the paper proposes multistage MCF decimator and interpolator.

FIXED-POINT IMPLEMENTATION OF COMB-BASED DIGITAL FILTERS

Marko Nikolic