

Analiza integralnih karakteristika Vejbulove raspodele

Hana Z. Stefanović, Zoran J. Popović, Dimitrije Č. Stefanović, Dejan R. Blagojević

Sadržaj — U ovom radu analizirane su integralne karakteristike Vejbulove raspodele, pri čemu je funkcija gustine verovatnoće anvelope primljenog signala razmatrana kao partikularno rešenje odgovarajuće diferencijalne jednačine. Obzirom da je Vejbulova raspodela opisana funkcijom više promenljivih, prilikom određivanja i analize integralnih karakteristika, jedna od promenljivih je tretirana kao parametar, a druge su postavljene na određene konstantne vrednosti, od interesa za praksu. Na taj način je dobijena familija krivih, za koju je određena jednačina obvojnice maksimuma, kojom je predstavljeno singularno rešenje pomenute diferencijalne jednačine. Zatim je ista procedura ponovljena za različite vrednosti svih relevantnih parametra.

Ključne reči — Funkcija gustine verovatnoće (pdf – Probability Density Function), singularno rešenje, Vejbulov model feding kanala

I. UVOD

POUZDANOST i kvalitet veze u bežičnim zemaljskim, a posebno mobilnim komunikacionim sistemima, značajno su uslovljeni pojavom fedinga. U sistemima sa višepropagacionim efektom analiza statističkih karakteristika anvelope primljenog radio signala vrlo je važna u procesu razvoja i planiranja mobilnih radio mreža, kao i u cilju izbora odgovarajuće tehnike prenosa [1].

Prilikom analize višepropagacionih sistema najčešće se koriste: Rejljeva, Rajsova, Nakagami- m , Nakagami- q i Vejbulova raspodela. Primena konkretnog modela uslovljena je specifičnostima propagacionog okruženja [2]. Rejljev model kanala koristi se u situacijama kada ne postoji direktna linija optičke vidljivosti – LOS (Line of Sight) između predajnika i prijemnika, što je tipično za urbana okruženja. U međugradskim zonama i prigradskim oblastima predložen je Rajsov model, koji uključuje postojanje LOS komponente [3]. Variranja trenutne snage primljenog signala u urbanim sredinama mogu se dosta dobro opisati i Nakagami- m raspodelom, koja u izvesnom smislu predstavlja uopštavanje Rejljevog i Rajsovog

H. Z. Stefanović, Visoka škola elektrotehnike i računarstva strukovnih studija u Beogradu, Vojvode Stepe 283, 11000 Beograd, Srbija; (e-mail: hanap@eunet.rs).

Z. J. Popović, Tehnički fakultet u Čačku, Volgina 15, 32000 Čačak, Srbija; (e-mail: a33@eunet.rs).

D. Č. Stefanović, Elektronski fakultet u Nišu, Aleksandra Medvedeva 14, 18000 Niš, Srbija; (e-mail: vule@elfak.ni.ac.rs).

D. R. Blagojević, Visoka Tehnička škola strukovnih studija u Nišu, Aleksandra Medvedeva 22, 18000 Niš, Srbija; (e-mail: dblagojevic70@yahoo.com).

modela, pošto se za odgovarajući izbor parametara svodi na Rejljev, odnosno Rajsov model [4]. Vejbulov model daje dosta dobre rezultate prilikom propagacije u urbanim sredinama, što je od posebnog značaja u situacijama kada Rejljev model ne daje zadovoljavajuće rezultate [5].

Analiza funkcije gustine verovatnoće u zavisnosti od relevantnih parametara važna je za pocenu statističkih karakteristika kanala.

U radu je analiziran Vejbulov model kanala, upravo zbog mogućnosti da se odgovarajućim izborom relevantnih parametara i drugi modeli opišu Vejbulovom raspodelom [6]. U drugom poglavlju opisane su opšte karakteristike modela, a zatim je analizirana funkcija gustine verovatnoće – pdf (Probability Density Function) anvelope primljenog signala sa stanovišta integralnih karakteristika, u trećem poglavlju. Takođe su prikazani numerički i grafo-analički rezultati, koji ukazuju na postojanje diferencijalne jednačine čije je partikularno rešenje razmatrana funkcija gustine verovatnoće. Obzirom da je Vejbulova pdf funkcija koja je zavisna od parametra dubine fedinga, nivoa signala na prijemu, kao i parametra srazmernog snazi signala, razmatrana je zavisnost ove funkcije od svakog od ovih parametara pojedinačno, pri čemu su drugi postavljani na određene konstantne vrednosti, od interesa za praksu. Za sve razmatrane zavisnosti određeni su maksimumi funkcija, kao i jednačina obvojnice tih maksimuma, koja je, u svim slučajevima, prava linija, posmatrano u logaritamskoj razmeri. Određivanjem ove obvojnice definisano je singularno rešenje pomenute diferencijalne jednačine [7], kojom se može opisati dinamika Vejbulovog procesa. Zaključna razmatranja izneta su u četvrtom poglavlju, a na kraju rada dat je pregled korišćene literature.

II. VEJBULOV MODEL KANALA

Vejbulova raspodela je empirijska raspodela koja je originalno korišćena kao statistički model za analizu pouzdanosti. Međutim u [8] predložen je generalizovani model fedinga, a Vejbulova raspodela je navedena kao specijalan slučaj. Ova raspodela je dosta jednostavna i fleksibilna, a koristi se za modelovanje feding kanala u urbanim sredinama, naročito u slučajevima kada Rejljeva raspodela ne daje adekvatne rezultate [6]. Takođe se, odgovarajućim izborom parametara može svesti i na lognormalnu raspodelu [5].

Model kanala sa Vejbulovom raspodelom anvelope razmatra signal sastavljen od skupa talasa koji se prostiru po više putanja u nehomogenoj sredini. Unutar skupa faze

rasejanih talasa su slučajne. Rezultujuća anvelopa dobija se kao nelinearna funkcija modula sume komponenti koje se prostiru po više putanja [9]. Takva nelinearnost se manifestuje u izrazima u kojima figuriše parametar snage, tako da se rezultujući intenzitet signala ne dobija jednostavno kao modul sume komponenti koje se prostiru po više putanja, nego kao modul sume na određeni eksponent.

Ako se pođe od pretpostavke da su $x_1(t)$ i $x_2(t)$ komponente u fazi i kvadraturi uskopojasnog procesa, na osnovu Centralne granične teoreme $x_i(t)$, $i=1,2$ predstavlja Gausov slučajni proces nulte srednje vrednosti i varijanse $\text{Var}\{x_i(t)\}=\sigma_0^2$. Apsolutna vrednost procesa definisanog kao $w(t)=x_1(t)+jx_2(t)$, čija je varijansa određena sa $\text{Var}\{w(t)\}=2\sigma_0^2=\Omega$, definiše Rejljijev proces $x(t)=\sqrt{x_1(t)+x_2(t)}$, čija raspodela anvelope ima funkciju gustine verovatnoće:

$$p_x(x) = \frac{2x}{\Omega} \exp\left(-\frac{x^2}{\Omega}\right), x > 0 \quad (1)$$

Ako je primljeni semplovani signal [90] w definisan kao:

$$w = x^{2/\beta} \cdot \exp(j2\phi/\beta) \quad (2)$$

gde je $\phi = \arctg(x_1/x_2)$, a β pozitivna realna konstanta, onda anvelopa $z = x^{2/\beta}$ primljenog signala ima funkciju gustine verovatnoće:

$$p_z(z) = \frac{\beta}{\Omega} z^{\beta-1} \exp\left(-\frac{z^\beta}{\Omega}\right) \quad (3)$$

pri čemu je:

$$\Omega = E[z^\beta]. \quad (4)$$

Funkcija gustine verovatnoće $p_z(z)$ odgovara Vejbulovoj raspodeli sa parametrom β koji predstavlja Vejbulov feding parametar. Veće vrednosti ovog parametra odgovaraju manjoj dubini fedinga, i obrnuto. U slučaju $\beta=2$ Vejbulova raspodela se svodi na Rejljijevu raspodelu [10].

Analiza karakteristika funkcije gustine verovatnoće važna je, osim za procenu statističkih parametara prvog reda, i za određivanje statističkih parametara drugog reda [11], kao i za procenu pokazatelja performansi telekomunikacionog sistema.

III. NUMERIČKA ANALIZA KARAKTERISTIKA FUNKCIJE GUSTINE VEROVATNOĆE

Grafički prikaz zavisnosti funkcije gustine verovatnoće anvelope primljenog signala od nivoa primljenog signala, za fiksnu vrednost parametra dubine fedinga i različite vrednosti parametra srazmernog snazi signala, u logaritamskoj razmeri, dat je na Sl. 1.

Na osnovu numeričke analize može se zaključiti da se sa porastom parametra srazmernog snazi signala maksimumi pdf dostižu za veće vrednosti nivoa primljenog signala, kao i da ti maksimumi imaju sve manje vrednosti, što je prikazano na Sl. 1. Takođe se može zaključiti da svi maksimumi leže na pravoj, odnosno da je obvojnica maksimuma familije funkcija prava linija, posmatrano u logaritamskoj razmeri, koja opisuje integralna

svojstva raspodele, prava linija, posmatrano u logaritamskoj razmeri. U cilju određivanja vrednosti nivoa signala za koje se dostižu maksimumi funkcije, zatim vrednosti tih maksimuma i koeficijenta pravca obvojnice, određen je prvi izvod funkcije, a nakon izjednačavanja sa nulom dobija se:

$$z_{p_{\max}} = \sqrt[\beta]{\frac{\Omega(\beta-1)}{\beta}} \quad (5)$$

$$p_{z_{\max}}(\Omega) = \frac{\beta}{\Omega} \left(\frac{\Omega(\beta-1)}{\beta}\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \cdot \exp\left(-\frac{\beta-1}{\beta}\right) \quad (6)$$

$$\log(\max p_z(\Omega)) = k_1 \log \Omega + n_1 \quad (7)$$

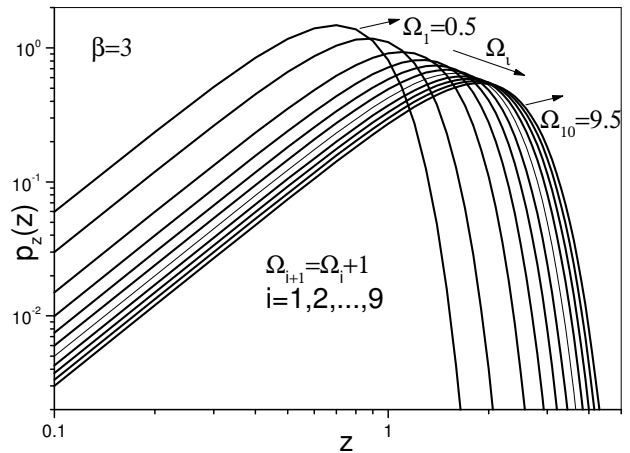
pri čemu je koeficijent pravca određen sa:

$$k_1 = -1/\beta \quad (8)$$

a odsečak na ordinati:

$$n_1 = \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \log(\beta-1) + \frac{1}{\beta} \log \beta - \frac{\beta-1}{\beta} \quad (9)$$

Vrednost koeficijenta pravca obvojnice, kao i vrednost odsečka na ordinati zavisi su od parametra dubine fedinga.



Sl. 1. Pdf signala na prijemu u zavisnosti od nivoa primljenog signala, za slučaj $\beta = 3$ i $\Omega = 0.5, 1, \dots, 9.5$

Obvojnicom je određeno singularno rešenje diferencijalne jednačine kojom se može opisati dinamika ovog procesa, pri čemu je funkcija gustine verovatnoće anvelope signala njeno partikularno rešenje:

$$p'_z(z) + p_z(z) \left(\frac{\beta}{\Omega} z^{\beta-1} - \frac{\beta-1}{z} \right) = 0 \quad (10)$$

Grafički prikaz zavisnosti funkcije gustine verovatnoće anvelope primljenog signala od parametra srazmernog snazi signala, za fiksnu vrednost parametra dubine fedinga i različite vrednosti nivoa signala na prijemu, u logaritamskoj razmeri, dat je na Sl. 2

Na osnovu numeričke analize može se zaključiti da se sa porastom nivoa signala na prijemu maksimumi pdf dostižu za veće vrednosti parametra srazmernog snazi signala, kao i da ti maksimumi imaju sve manje vrednosti, što je prikazano na Sl. 2. Takođe se može zaključiti da svi maksimumi leže na pravoj, odnosno da je obvojnica maksimuma familije funkcija prava linija, posmatrano u logaritamskoj razmeri. U cilju određivanja vrednosti

parametra srazmernog snazi signala za koje se dostižu maksimumi funkcije, zatim vrednosti tih maksimuma i koefijenta pravca obvojnice, određen je prvi izvod funkcije, a nakon izjednačavanja sa nulom dobija se:

$$\Omega_{p_{\max}} = z^{\beta} \quad (11)$$

$$p_{\Omega_{\max}}(z) = \frac{\beta}{z} \exp(-1) \quad (12)$$

$$\log(\max p_z(z)) = k_2 \log z + n_2 \quad (13)$$

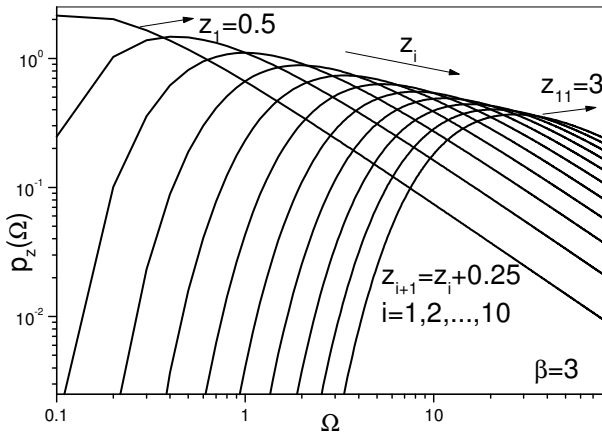
pri čemu je koefijent pravca određen sa:

$$k_2 = -1 \quad (14)$$

a odsečak na ordinati:

$$n_2 = \log \beta - 1 \quad (15)$$

Koefijent pravca obvojnice ima vrednost -1, nezavisno od vrednosti parametra dubine fedinga, dok je vrednost odsečka na ordinati zavisna od parametra dubine fedinga.



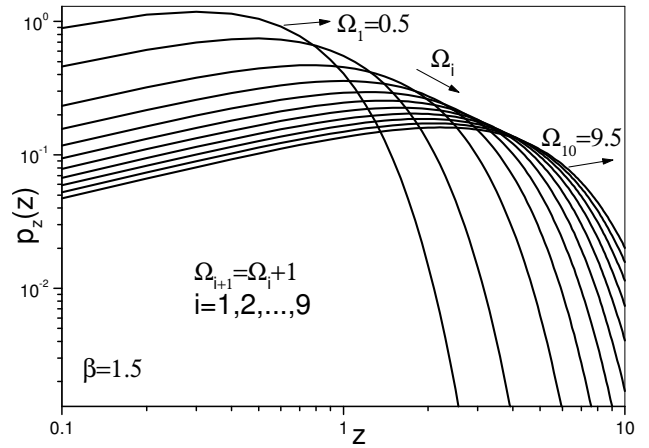
Sl. 2. Pdf signala na prijemu u zavisnosti od parametra srazmernog snazi signala, za slučaj $\beta = 3$ i $z = 0.5, 0.75, \dots, 3$

Obvojnicom je određeno singularno rešenje diferencijalne jednačine kojom se može opisati dinamika ovog procesa, pri čemu je funkcija gustine verovatnoće anvelope signala njeno partikularno rešenje:

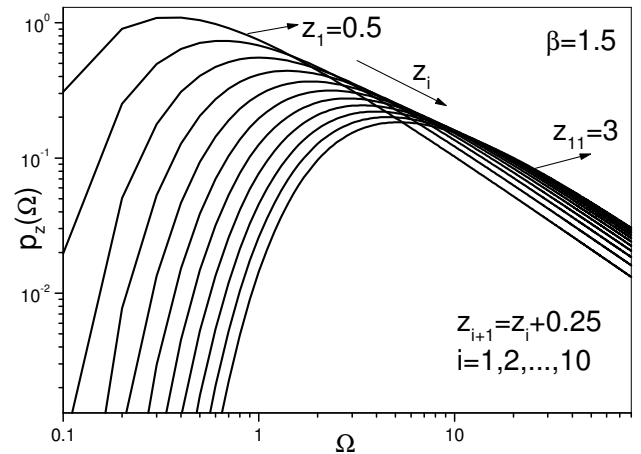
$$p'_z(\Omega) + p_z(\Omega) \left(\frac{1}{\Omega} - \frac{z^\beta}{\Omega^2} \right) = 0 \quad (16)$$

Numerička analiza grafički prezentovna na Sl. 1 i Sl. 2 ponovljena je slučaj promene vrednosti parametra dubine fedinga, u cilju razmatranja kako taj parametar utiče na izgled obvojnice maksimuma familije funkcija gustine verovatnoće. Za slučaj da parametar dubine fedinga ima vrednost $\beta = 1.5$, dobijeni rezultati grafički su prikazani na Sl. 3 i Sl. 4.

Zaključak je da su obvojnice maksimuma familije funkcija gustine verovatnoće i u ovim slučajevima prave linije, posmatrano u logaritamskoj razmeri. Koefijent pravca, kao i vrednost odsečka na ordinati, u slučaju analize pdf u zavisnosti od nivoa primljenog signala, smanjuju se sa smanjenjem vrednosti parametra dubine fedinga, što je grafički prezentovano na Sl. 5. U slučaju analize pdf u zavisnosti od parametra srazmernog snazi signala koefijent pravca obvojnice ostaje nepromenjen, dok se vrednost odsečka na ordinati smanjuje sa smanjenjem vrednosti parametra dubine fedinga, što je grafički prezentovano na Sl. 6.

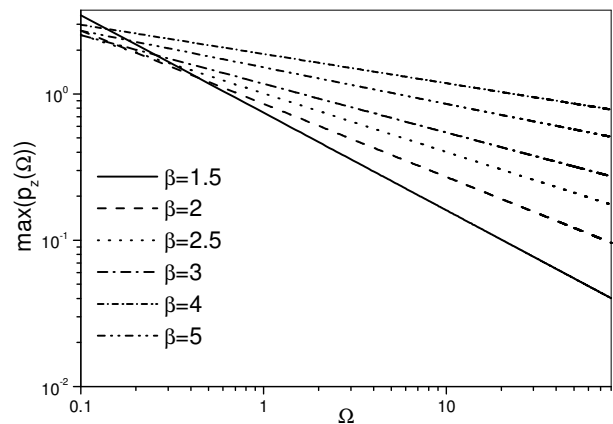


Sl. 3. Pdf signala na prijemu u zavisnosti od nivoa primljenog signala, za slučaj $\beta = 1.5$ i $\Omega = 0.5, 1, \dots, 9.5$

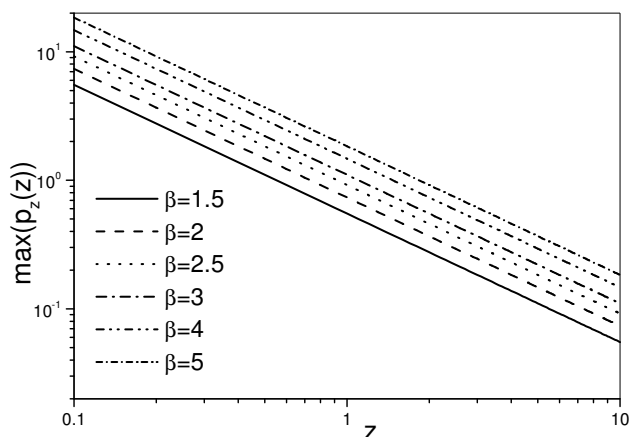


Sl. 4. Pdf signala na prijemu u zavisnosti od parametra srazmernog snazi signala, za slučaj $\beta = 1.5$ i $z = 0.5, 0.75, \dots, 3$

Obvojnice maksimuma familija funkcija gustine verovatnoće, za različite vrednosti parametra dubine fedinga, u zavisnosti od nivoa primljenog signala, kao i u zavisnosti od parametra srazmernog snazi signala, takođe su grafički prezentovane na Sl. 5. i Sl. 6.



Sl. 5. Zavisnost obvojnice maksimuma pdf funkcija od vrednosti parametra dubine fedinga, u funkciji nivoa primljenog signala



Sl. 6. Zavisnost obvojnice maksimuma pdf funkcija od vrednosti parametra dubine fedinga, u funkciji parametra srazmernog snazi signala

Osnovna ideja je da se funkcije raspodele mogu, umesto polaznim jednačinama, u određenim proračunima zameniti parametrima obvojnica, koje su, kao što je pokazano, opisane jednostavnijim funkcijama, čime bi se smanjilo vreme potrebno za numerička izračunavanja i optimizovala odgovarajuća hardverska realizacija.

IV. ZAKLJUČAK

Za određivanje statističkih karakteristika prvog i drugog reda prijemnog radio signala neophodno je poznavanje karakteristika funkcije gustine verovatnoće njegove anvelope. U ovom radu dati su rezultati ispitivanja osobina funkcije gustine verovatnoće anvelope signala koje do sada nisu obrađivane u literaturi. Određen je analitički izraz za obvojnica maksimuma familije ovih funkcija u zavisnosti od relevantnih parametara. Dobijeni rezultati pokazuju da je položaj maksimuma ovih funkcija jedinstveno određen jednačinom obvojnice, bez obzira na vrednost variranih parametara. Na taj način mogu se definisati granični uslovi radio prenosa za date propagacione uslove.

Korišćenje izvedenih analitičkih izraza u procesu projektovanja radio veza može značajno ubrzati procenu performansi sistema, jer su gotovo svi pokazatelji performansi povezani sa funkcijom gustine verovatnoće anvelope signala.

LITERATURA

- [1] W. Y. C. Lee, *Mobile Cellular Communications*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1989.
- [2] J. Proakis, *Digital Communications*, 3rd Ed., McGraw-Hill, 1999.
- [3] M. K. Simon, M. S. Alouini, *Digital Communications over Fading Channels: A Unified approach to performance analysis*, John Wiley, New York, 2000.
- [4] M. Nakagami, *The m-distribution, a General Formula of Intensity Distribution of Rapid Fading in Statistical Methods in Radio Wave Propagation*, W. Hoffman, Ed. Oxford, England: Pergamon, 1960.
- [5] D. Drajić, *Uvod u statističku teoriju telekomunikacija*, Akademska misao, Beograd, 2003.
- [6] C. N. Sagias, G. Karagiannidis, "Gaussian Class Multivariate Weibull Distributions: Theory and Applications in Fading Channels", *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. 51, No. 10, pp. 3608-3619, October 2005.
- [7] A. Polyenin, V. Zaitsev, A. Moussiaux, *Handbook of First Order Partial Differential Equations*, Taylor&Francis, London, 2002.
- [8] M. D. Yacoub, "The α - μ distribution: A general fading distribution", *Proc. IEEE Int. Symp. Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, PIMRC 2002, pp. 629-633, Lisbon, Portugal
- [9] C. N. Sagias, G. K. Karagiannidis, A. D. Zogas, P. Mathiopoulos, S. Kotsopoulos, G. S. Tombras, "Performance of diversity receivers over nonidentical Weibull fading channels", *Proc. IEEE Vehicular Technology Conference*, pp. 480-484, Milan, Italy, May 2004.
- [10] C. N. Sagias, A. D. Zogas, G. K. Karagiannidis, G. S. Tombras, "Performance analysis of switched diversity receivers in Weibull fading", *IEEE Electronic Letters*, Vol. 39, No. 20, pp. 1472-1474, October 2003.
- [11] C. Sagias, A. Zogas, G. Karagiannidis, G. Tombras, "Channel capacity and second order statistics in Weibull fading", *IEEE Communication Letters*, Vol. 8, No. 6, pp. 377-379, June 2004.

ABSTRACT

In this paper Weibull fading channel model is described and some integral characteristics of Weibull distribution are analyzed. For analytical and numerical evaluation of system performance, the Weibull probability density functions are analyzed like particular solutions of corresponding differential equation, while the existence of singular solution is considered and analyzed under different conditions. It is also shown that the envelope of probability density function curves family is a straight line, for all values of varying parameters. This new expression can be used during mobile system designing.

SOME INTEGRAL PROPERTIES OF WEIBULL DISTRIBUTION

H. Stefanović, Z. Popović, D. Stefanović, D. Blagojević