

Analiza performansi diverziti prijema BPSK signala u kanalu sa K-fedingom

Aleksandra Cvetković, Nenad Milošević, Zachos Georgios, Zorica Nikolić

Sadržaj — U ovom radu je određena verovatnoća greške BPSK sistema sa GSC (Generalized Selection Combining) prijemnikom u kanalu sa K-fedingom. Dati su rezultati koji pokazuju uticaj parametra fedinga i snage signala na verovatnoću greške.

Ključne reči — K-feding, efekat senke, diverziti prenos.

I. UVOD

Diverziti metode predstavljaju efikasnu tehniku za smanjenje štetnog uticaja fedinga koji nastaje usled prostiranja po više putanja u bežičnim mobilnim kanalima. U sistemima sa antenskim diverzitom, dobar kompromis između složenosti i performansi sistema je moguće ostvariti primenom generalizovanog selekcionog kombinovanja (GSC) u prijemniku, gde se od ukupnog broja grana bira određeni podskup onih koje imaju najveću trenutnu vrednost odnosa signal-šum (SNR), koje se zatim adaptivno kombinuju na odgovarajući način [1]. Zbog fiksnih troškova implementacije GSC prijemnika, u literaturi se može naći veliki broj rezultata za performanse takvih prijemnika u kanalima sa Rejljevim, Rajsovim i Nakagami-m fedingom [2].

U bežičnom okruženju na kvalitet signala na prijemu, pored fedinga koji nastaje usled prostiranja po više putanja, utiču i spore varijacije osnovnog nivoa signala koje su posledica uticaja senke od različitih prepreka na prenosnoj putanji. Gubici na putu usled uticaja senke mogu predstaviti lognormalnom raspodelom. Rejlj-lognormalna (R-L) raspodela je poznata kompozitna statistička raspodela koja se koristi u slučajevima kada na prijemni signal utiču, kako komponente nastale usled uticaja senke, tako i usled prostiranja po više prenosnih putanja [3]. Međutim, R-L raspodela se ne koristi često, jer nema pogodnu matematičku formu za određivanje performansi sistema. Da bi se taj problem rešio, R-L raspodela se aproksimira K raspodelom [3], [4], koja

Ovaj rad je delom finansiran sredstvima Ministarstva za nauku Republike Srbije u okviru projekta "Razvoj i realizacija nove generacije softvera, hardvera i usluga na bazi softverskog radija za namenske aplikacije" (TR-11030).

Aleksandra Cvetković, Elektronski fakultet u Nišu, Srbija (telefon: 381-18-529367; faks: 381-18-588899; e-mail: aleksandra321@gmail.com).

Nenad Milošević, Elektronski fakultet u Nišu, Srbija (telefon: 381-18-529367; faks: 381-18-588899; e-mail: nenad.milosevic@elfak.ni.ac.rs).

Zachos Georgios, Elektronski fakultet u Nišu, Srbija (telefon: 381-18-529424; faks: 381-18-588899;).

Zorica Nikolić, Elektronski fakultet u Nišu, Srbija (telefon: 381-18-529245; faks: 381-18-588899; e-mail: zorica.nikolic@elfak.ni.ac.rs).

predstavlja kombinaciju Rejljeve i Gama raspodele i koja omogućava izvođenje analitičkih rezultata koji opisuju performanse.

U literaturi nema puno podataka o performansama GSC prijemnika koji rade u okruženju sa kompozitnim prostiranjem talasa, kao što je model sa K-fedingom. U [9] je predstavljena analiza performansi GSC prijemnika pomoću funkcije generatriše momenta (MGF). U radu se pretpostavlja da GSC prijemnik ima proizvoljan broj nezavisnih i sa identičnim raspodelama diverziti grana u kanalu sa K-fedingom, takvim da je parametar fedinga k pozitivan i jednak celom broju plus jedna polovina.

U ovom radu je izvršena analiza uticaja parametra fedinga i odnosa signal/šum na verovatnoću greške BPSK sistema.

II. K-RASPODELA

U radu se polazi od pretpostavke da je okolina sa fedingom takva da je anvelopa signala X u prijemnoj anteni slučajna promenljiva sa K -raspodelom i funkcijom gustine verovatnoće (pdf) date pomoću [5]:

$$f_x(x) = \frac{4}{\Gamma(k)\sqrt{\Omega}} \left(\frac{x}{\sqrt{\Omega}}\right)^k K_{k-1}\left(\frac{2}{\sqrt{\Omega}}x\right) \quad (1)$$

gde je k parametar fedinga, $\Omega = E[X^2]/k$ predstavlja srednju snagu, a $E[\cdot]$ označava očekivanje. U (1), $\Gamma(\cdot)$ predstavlja Gamma funkciju, a $K_\nu(\cdot)$ je modifikovana Beselova funkcija ν -tog reda druge vrste. Treba primetiti da je K raspodela izvedena kao specijalan slučaj uopštene K raspodele [5], [6] tako što je uzet slučaj kada je $m = 1$ u [5, jednačina (1)].

Trenutna vrednost SNR-a po primljenom simbolu za svaku diverziti granu je $\gamma = X^2 E_s / N_0$, gde E_s predstavlja srednju energiju simbola, a N_0 je jednostrana spektralna gustina snage aditivnog belog Gausovog šuma, za koju je pretpostavljeno da je jednaka za sve grane. Odgovarajuća srednja vrednost SNR-a je data kao $\gamma_{av} = k\Omega E_s / N_0$.

Pdf od γ se može dobiti iz (1) pomoću odgovarajućih promena promenljivih kao:

$$f(\gamma) = \frac{2(k/\gamma_{av})^{\frac{k+1}{2}} \gamma^{\frac{k-1}{2}} K_{k-1}(2\sqrt{\gamma \cdot k / \gamma_{av}})}{\Gamma(k)}, \gamma \geq 0 \quad (2)$$

Funkcija kumulativne raspodele (cdf) promenljive γ data je jednačinom:

$$F(\gamma) = \int_0^\gamma f(u) du,$$

a prema [7] ista jednačina se može razviti u sledeći oblik:

$$F(\gamma) = 1 - \frac{2(\gamma \cdot k / \gamma_{av})^{k/2}}{\Gamma(k)} K_k\left(2\sqrt{\gamma \cdot k / \gamma_{av}}\right), \gamma \geq 0. \quad (3)$$

MGF za γ je definisana jednačinom

$$M_\gamma(x) = \int_0^\infty e^{-x\gamma} f(\gamma) d\gamma$$

Ukoliko pretpostavimo da su diverziti grane sa nezavisnim i identično raspodeljenim fadingom, MGF SNR-a na izlazu GSC (N, M) prijemnika, gde se za svaki simbol bira i kombinuje N od ukupno M grana, može se sračunati na osnovu [6]

$$M_{\gamma_{GSC}}(x) = N \binom{M}{N} \int_0^{\pi/2} e^{-x \tan \theta} f(\tan \theta) [F(\tan \theta)]^{M-N} \times [\varphi(x, \tan \theta)]^{N-1} \sec^2 \theta d\theta \quad (4)$$

gde $\varphi(a, b)$ predstavlja marginalnu MGF, a definisana je na sledeći način:

$$\varphi(a, b) = \int_b^\infty e^{-a\gamma} f(\gamma) d\gamma \quad (5)$$

Nakon sračunavanja vrednosti MGF u zavisnosti od γ mogu se odrediti i vrednosti pdf i cdf izlaznog SNR-a, kao i srednja verovatnoća greške po simbolu za koherentni i nekoherentni GSC prijemnik [2], [8].

III. MARGINALNA MGF ZA K -RASPODELU

Da bi se izračunala MGF izlaznog SNR-a GSC prijemnika mora se odrediti marginalna MGF SNR-a za slučaj jedne diverziti grane, što je predstavljeno u ovom poglavlju. Nakon zamene (2) u (5) i primene transformacije $u = \sqrt{t}$, marginalna MGF

$$\varphi(s, x) = \frac{4(k/\gamma_{av})^{k+1}}{\Gamma(k)} \int_{\sqrt{x}}^\infty u^k e^{-su^2} K_{k-1}\left(2\sqrt{u \cdot k / \gamma_{av}}\right) du \quad (6)$$

Za integral (6) teško je dobiti zatvorenu formu za sve vrednosti parametra fadinga k , međutim moguće je izvesti jednostavnije analitičke izraze za marginalnu MGF kada je k jednako pozitivnoj celobrojnoj vrednosti plus jedna polovina. Rezultujući izrazi uključuju konačnu sumu poznatih matematičkih funkcija. U ovom poglavlju razmatrana su dva slučaja i to a) kada je $k = x + 1/2$, pri čemu je $x = 1, 2, 3, \dots$ i b) kada je $k = 1/2$.

A. k je jednako celobrojnoj vrednosti plus jedna polovina

Da bi se izveo izraz za marginalni MGF kada je $k = x + 1/2$, pri čemu je $x = 0, 1, \dots$ koristiće se modifikovana Beselova funkcija koja važi u slučaju kada je v jednako celobrojnoj vrednosti plus jedna polovina (za $v = n + 1/2$ za $n = 0, 1, \dots$) i ima oblik [7],

$$K_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{m=0}^n \frac{(n+m)!}{m!(n-m)!(2z)^m} \quad (7)$$

Nakon korišćenja (7), menjanja redosleda integracije i sumiranja u (6), korišćenja transformacije $t = u - \sqrt{x}$ i nakon matematičkih manipulacija, (6) se može napisati u obliku:

$$\varphi(s, x) = \frac{4(k/\gamma_{av})^{\frac{k+1}{2}} \sqrt{\pi}}{\Gamma(k)} \sum_{l=0}^{q-1} \frac{(q+l-1)!}{l!(q-l-1)!} \left(4\sqrt{k/\gamma_{av}}\right)^{-l-\frac{1}{2}} \times \exp(-sx - 2\sqrt{x \cdot k / \gamma_{av}}) G(s, x) \quad (8)$$

gde je

$$G(s, x) = \int_0^\infty (\tau + \sqrt{x})^{q-l} e^{-s\tau^2 - 2(s\sqrt{x} + \sqrt{k/\gamma_{av}})\tau} d\tau \quad (9)$$

Ukoliko pretpostavimo da je $(q-l)$ u (9) ceo broj i za $x \neq 0$ primenimo binomni identitet [7], dobija se

$$G(s, x) = \sum_{m=0}^{q-l} \binom{q-l}{m} x^{\frac{q-l-m}{2}} \mathfrak{Z}(s, x) \quad (10)$$

gde je

$$\mathfrak{Z}(s, x) = \int_0^\infty \tau^m e^{-s\tau^2 - 2(s\sqrt{x} + \sqrt{k/\gamma_{av}})\tau} d\tau \quad (11)$$

Integral u jednačini (11) se može izračunati pomoću parabolične cilindrične funkcije [7], pod uslovom da je s pozitivan broj. Kada se parabolična cilindrična funkcija zameni jednačinom (4) u [10] i posle nekoliko matematičkih manipulacija, (11) se može transformisati u sledeći oblik:

$$\mathfrak{Z}(s, x) = m!(4s)^{-\frac{m+1}{2}} \Psi\left[\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}; \left(\sqrt{sx} + \sqrt{\frac{k/\gamma_{av}}{s}}\right)^2\right] \quad (12)$$

gde je $\Psi(\cdot; \cdot)$ hipergeometrijska funkcija [7].

Marginalna MGF za pozitivnu vrednost s i $x \neq 0$ se konačno može predstaviti na sledeći način:

$$\varphi(s, x) = \frac{4\sqrt{\pi}(k/\gamma_{av})^{\frac{k+1}{2}}}{\Gamma(k)} \exp(-sx - 2\sqrt{x \cdot k / \gamma_{av}}) \times \sum_{l=0}^{k-\frac{3}{2}} \frac{(k-\frac{1}{2}-l)(k-\frac{3}{2}+l)!}{l!} \left(4\sqrt{k/\gamma_{av}}\right)^{-l-\frac{3}{2}} \times \sum_{m=0}^{k-l-\frac{1}{2}} \frac{x^{\frac{1}{2}(k-l-m-\frac{1}{2})} (4s)^{-\frac{m+1}{2}}}{(k-l-m-\frac{1}{2})!} \Psi\left[\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}; \left(\sqrt{sx} \sqrt{\frac{k/\gamma_{av}}{s}}\right)^2\right] \quad (13)$$

B. k je jednako jednoj polovini

U posebnom slučaju kada je $k = 1/2$, zamenom jednačine (8.469.3) iz [7] u (6) i uz primenu transformacije $\tau = u - \sqrt{x}$ dobija se jednačina

$$\varphi(s, x) = 2\sqrt{\frac{k}{\gamma_{av}}} e^{-sx - \sqrt{x \cdot k / \gamma_{av}}} \int_0^\infty e^{-s\tau^2 - 2(s\sqrt{x} + \sqrt{k/\gamma_{av}})\tau} d\tau \quad (14)$$

Uz pomoć jednačina (3.462.1) i (9.254.1) iz [7] konačno se može dobiti izraz

$$\varphi(s, x) = \sqrt{\frac{\pi \cdot k / \gamma_{av}}{s}} \exp\left(\frac{k / \gamma_{av}}{s}\right) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{sx} + \sqrt{\frac{k / \gamma_{av}}{s}}\right) \quad (15)$$

gde je $\operatorname{erfc}(\cdot)$ komplementarna funkcija greške [jednačina (8.520.4) u 7].

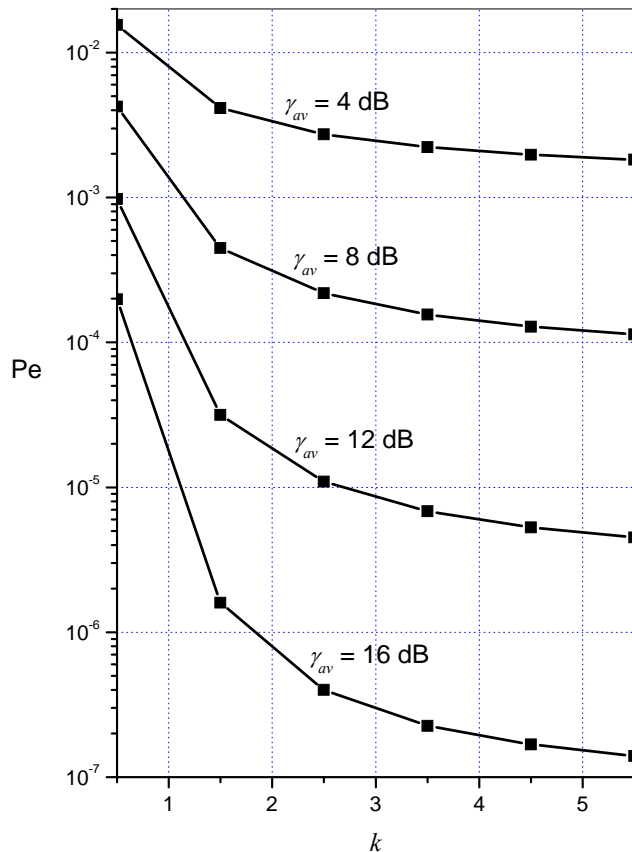
Kada je poznata MGF, srednja verovatnoće greške po simbolu BPSK sistema može da se izračuna prema izrazu [2], [8]

$$P_{MPSK} = \frac{1}{\pi} \int_b^{\frac{\pi}{2}} M_{\gamma_{GSC}}\left(\frac{\sin^2(\pi/2)}{\sin^2 \theta}\right) d\theta \quad (16)$$

IV. NUMERIČKI REZULTATI

Numerički rezultati, prikazani u ovom poglavlju, prikazuju uticaj parametra fedinga k i srednjeg odnosa signal/šum po grani γ_{av} na performanse sistema. Razmatra se slučaj kada prijemnik ima $M = 4$ grane, od kojih se kombinuju $N = 3$ sa najvećim odnosom signal/šum.

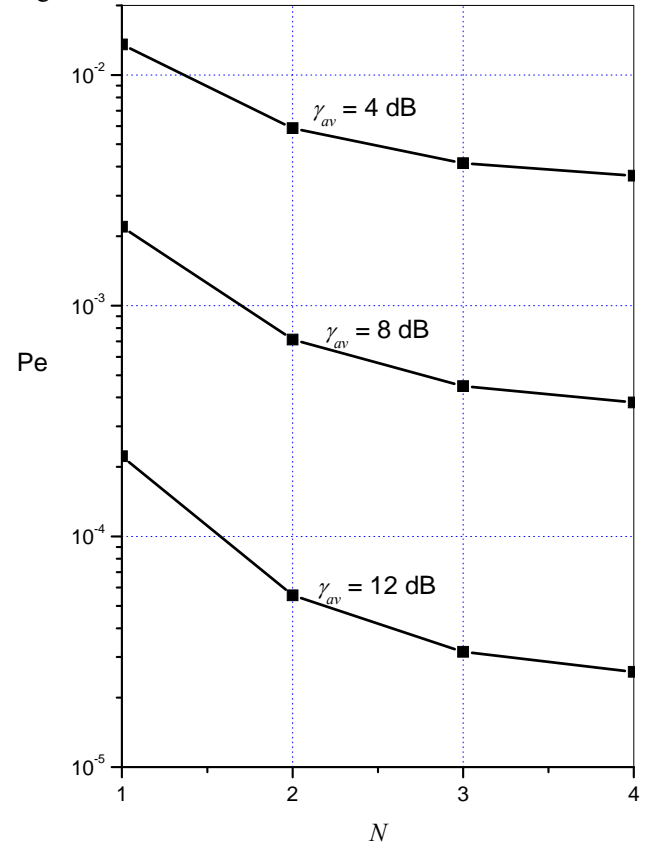
Na Sl. 1 je prikazana zavisnost verovatnoće greške po simbolu od parametra fedinga k , sa srednjim SNR kao parametrom.



Sl. 1. Zavisnost srednje vrednosti verovatnoće greške od parametra fedinga

Sa slike se vidi da se sa porastom parametra k smanjuje verovatnoća greške, jer feding postaje slabiji. Ova pojava je izraženija u oblasti malih vrednosti za k , dok je za $k > 4$

uticaj promene parametra fedinga znatno manji. Takođe, uticaj parametra fedinga je veći za veći srednji odnos signal/šum.



Sl. 2. Zavisnost srednje vrednosti verovatnoće greške od broja grana koje se kombinuju

Slika 2 pokazuje zavisnost verovatnoće greške od broja grana koje se kombinuju, za slučaj da prijemnik ima $M = 4$ grane. Parametar fedinga iznosi $k = 1.5$. Može da se uoči da se najveći dobitak ostvaruje kada se N poveća sa 1 na 2. Dalje povećanje broja grana koje se kombinuju slabije utiče na smanjenje verovatnoće greške.

V. ZAKLJUČAK

U ovom radu je predstavljena analiza srednje verovatnoće greške po simbolu BPSK sistema sa GSC prijemnikom sa K fedingom. Analiziran je uticaj parametra fedinga i srednjeg odnosa signal/šum na performanse sistema. Pokazuje se da se verovatnoća greške smanje sa porastom parametra fedinga. Pored toga, za veći odnos signal/šum, veći je uticaj promene parametra fedinga na verovatnoću greške. Sa povećanjem broja grana koje se kombinuju smanjuje se verovatnoća greške, pri čemu je sa povećanjem broja grana relativno smanjenje verovatnoće greške manje.

LITERATURA

- [1] T. Eng, N. Kong and L. B. Milstein, „Comparison of diversity combining techniques for Rayleigh-fading channels,“ *IEEE Trans. Commun.*, vol 44, no. 9, pp. 1117-1129, Sep. 1996.
- [2] M. K. Simon and M. S. Alouini, *Digital communications over fading channels*, 2nd edition, New York: Wiley & Sons, 2005.
- [3] A. Abdi, H. A. Barger and M. Kaveh, “A simple alternative to the lognormal model of shadow fading in terrestrial and satellite

- channels," in *Proc. 54th IEEE VTC 001 Fall*, vol. 4, Nov. 7-10.2001, pp. 2058-2062.
- [4] A. Abdi and M. Kaveh, "K distribution: An appropriate substitute for Rayleigh-lognormal distribution in fading-shadowing wireless channels," *Electronics Lett.*, vol. 34, no. 9, pp. 851-852, Apr. 1998.
- [5] P. S. Bithas, N. C. Sagias, P. T. Mathiopoulos, G. K. Karagiannidis and A. A. Rontogiannis, "On the performance analysis of digital communications over generalized K fading channels," *IEEE Commun. Lett.* Vol.10, no.5, pp. 353-355, May 2006.
- [6] P. S. Bithas, P. T. Mathiopoulos and S. A. Kotsopoulos, "Diversity reception over generalized K fading channels," *IEEE Commun. Lett.*, vol. 6, no. 12, pp. 4238-4243, Dec. 2007.
- [7] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals series and products*, 7th edition, New York: Academic Press, 2007
- [8] A. Annamalai, G. Deora and C. Tellambura, "Analysis of generalized selection diversity systems in wireless channels," *IEEE Trans. Veh. Technol.* Vol. 55, no. 6, pp. 1765-1775, Nov. 2006.
- [9] P. Theofilakos, A. G. Kantas and G. P. Efthymoglou, "Performance of generalized selection combining receivers in K fading," *IEEE Communications Letters*, Vol. 12, no. 11, November 2008, pp. 816-818
- [10] E. W. Weisstein, "Parabolic cylinder function," Math-World – A Wolfram Web Resource

ABSTRACT

In this paper we consider the error probability of a BPSK system using GSC (Generalized Selection Combining) receiver in K-fading channel. Results show the influence of fading parameter as well as signal power on the error probability of the system.

PERFORMANCE ANALYSIS OF DIVERSITY BPSK SYSTEM IN K-FADING CHANNEL

Aleksandra Cvetković, Nenad Milošević,
Zachos Georgios, Zorica Nikolić